

RÉVISIONS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

1. Exercices traités en cours

2. Continuité

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

3. Uniforme continuité

Solution de 12 :

Ln présente un problème d'uniforme continuité au voisinage de 0 (asymptote verticale). On peut utiliser des suites. L'avantage ici, est que $\ln(x_n) - \ln(x'_n)$ se réécrit, se qui permet de trouver facilement des suites (x_n) et (x'_n) tendant vers 0 contredisant l'uniforme continuité.

Pour $f : x \mapsto x \ln x$ commencer par tracer la courbe (ça fait réviser les études de fonctions) et se rendre compte que la branche parabolique au voisinage de $+\infty$ risque de poser problème.

Chercher des suites au voisinage de $+\infty$, par exemple, $x_n = n$ et $x'_n = n + h_n$ où on cherche $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ tel que $f(x'_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$ ce qui se trouve en faisant un développement asymptotique...

Solution de 13 :

Pas de miracle ici, il faut sortir les ε .

Traduire l'uniforme continuité sur une seule période ne suffit pas il y a des problèmes de raccord (cas de deux points, l'un se ramenant au début de la période et l'autre à la fin) : il faut le faire sur un intervalle de deux périodes, puis se ramener dans cet intervalle.

Solution de 14 :

Sortir les ε .

Au voisinage de $+\infty$, les variations sont contraintes par la convergence.

Ailleurs, on est sur un segment donc cela se passe bien.

Reste à gérer le raccord...

4. Dérivabilité

Vrai ou faux

1. Une fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ à valeurs complexes telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\Re f$ et $\Im f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a, b[$.

Solution de 15 : Très classique (jusqu'à 4.)

5. (a) Le résultat est immédiat si $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $b = 1$ (quitte à tout diviser par b).

Si P est scindé, il s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{m_k}$ avec $x_1 < \dots < x_n$ et comme dans la question précédente, chaque x_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$, ce qui donne $\deg P - n$ racines de $aP + P'$ comptées avec multiplicité. Il en manque encore n .

L'idée astucieuse est de considérer $f : x \mapsto P(x)e^{ax}$ qui se dérive en $f' : x \mapsto (P'(x) + aP(x))e^{ax}$ possédant les mêmes zéros que $P' + aP$.

Or f s'annule en tous les x_k et possède une limite nulle soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. En appliquant n fois le théorème de Rolle (éventuellement généralisé), on obtient n zéros distincts et distincts des x_k de f' donc les n racines qu'il nous manquait de $P' + aP$ qui est bien scindé.

Ensuite, pour (b), question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante...

On a

$$\sum_{k=0}^d a_k P^{(k)} = [P(D)](P)$$

Mais $P = \lambda \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc

$$[P(D)](P) = \lambda (D - \alpha_d Id) \circ \dots \circ (D - \alpha_1 Id)(P)$$

Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$,

$$[(D - \alpha_d Id) \circ \dots \circ (D - \alpha_1 Id)](P)$$

est scindé...

Solution de 16 :

Applications itérées du théorème de Rolle, en remarquant que 1 et -1 sont racines d'ordre n de $(X^2 - 1)^n$.

Solution de 18 : Dérivées successives d'arctangente

Utiliser une récurrence puis une généralisation du théorème de Rolle.

Solution de 19 : Théorème de Darboux

1. On suppose, sans perte de généralités, que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. On aimerait adapter la preuve du théorème de Rolle en disant que le maximum que f atteint en étant continue sur le segment $[a, b]$ est atteint dans $]a, b[$ mais on ne peut pas le dire directement car f' n'est pas supposée continue donc on ne peut pas conclure de l'hypothèse car f est strictement croissante au voisinage de a et strictement décroissante au voisinage de b .

Cependant, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f'(a) > 0$ donc au voisinage de a , $f(x) - f(a) > 0$ soit $f(x) > f(a)$ et de même, au voisinage de b , $f(x) > f(b)$ ce qui assure que ce maximum est atteint dans $]a, b[$. La condition nécessaire d'extremum local permet bien de conclure.

2. Si, plus généralement, f dérivable sur I , $a, b \in I$ distincts et m tel que $f'(a) < m < f'(b)$, alors $g = f - m \text{id}$ est dérivable sur $[a, b]$ et la première question nous dit que g' s'annule donc que m est atteinte par f' sur $]a, b[$.

Solution de 20 : Égalité de Taylor-Lagrange

Première méthode On pose

$$\varphi : x \mapsto f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(b-x)^{n+1} \right) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^k}{k!} - A(b-x)^{n+1}$$

avec A tel que $\varphi(a) = 0$ (ce qui est possible car $a \neq b$). On applique le théorème de Rolle :

H1 φ est continue sur $[a, b]$ car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

H2 φ est dérivable sur $]a, b[$ car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

H3 $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$

On a donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\begin{aligned} \varphi'(c) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k f^{(k)}(c)(b-c)^{k-1}}{k!} - \frac{f^{(k+1)}(c)(b-c)^k}{k!} \right) + (n+1)A(b-c)^n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}(c)(b-c)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{f^{(k+1)}(c)(b-c)^k}{k!} \right) - f'(c) + (n+1)A(b-c)^n \quad \triangle \text{ pas de factorielle de nombre } < 0 \\ &= f'(c) - \frac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n}{n!} - f'(c) + (n+1)A(b-c)^n \end{aligned} \quad \text{par télescopage}$$

donc

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

ce qui conclut avec $\varphi(a) = 0$.

Deuxième méthode Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 1$ est exactement le théorème des accroissements finis.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la formule soit vraie au rang $n-1$ et soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

Posons $\varphi : x \mapsto f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + A(x-a)^{n+1} \right)$ avec A tel que $\varphi(b) = 0$

(ce qui est possible car $a \neq b$.)

On applique le théorème de Rolle à φ :

H1 φ est continue sur $[a, b]$ car f l'est.

H2 φ est continue sur $]a, b[$ car f l'est.

H3 $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$

On a donc $d \in]a, b[$ tel que $\varphi'(d) = 0$ avec

$$\varphi' : x \mapsto f'(x) - f'(a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - (n+1)A(x-a)^n.$$

On applique l'hypothèse de récurrence à $f' \in \mathcal{C}^n([a, d])$: on a $c \in]a, d[\subset]a, b[$ tel que

$$\varphi'(d) = 0 = \frac{(f')^{(n)}(c)}{n!}(d-a)^n - (n+1)A(d-a)^n$$

ce qui donne $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ et établit la récurrence avec $\varphi(b) = 0$.

Une alternative à la récurrence consiste à réappliquer le théorème de Rolle à φ' sur $[a, d]$ et continuer ainsi (chaque dérivée étant nulle en a) jusqu'à $\varphi^{(n+1)} : x \mapsto f^{(n+1)}(x) - (n+1)!A$ nul en un certain $c \in]a, b[$, ce qui permet de conclure.

Solution de 21 : Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $x \in [a, b]$, distinct des x_i (sinon, c'est immédiat, tous les ξ_x conviennent.).

Soit $\varphi : t \mapsto f(t) - P_n(t) - K T(t)$ où K est tel que $\varphi(x) = 0$ (ce qui est possible car $T(x) \neq 0$ car x n'est pas l'un des x_i .)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les x_i , soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, φ est continue sur les segments et dérivable sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]a, b[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ' , puis φ'' , etc jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\varphi^{(j)}$ admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0, n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi_x \in]a, b[$.

Or $\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - P_n^{(n+1)} - K T^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)} - K(n+1)!$ car P_n est de degré au plus n et T est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ et donc $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} T(x).$

5. Parties convexes

Solution de 23 : Enveloppe convexe

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A .

C'est bien convexe, contenant A et plus petit que tous les autres.

Solution de 24 : Points extrémaux

Pour le premier, un polygone à n côté convient.

Pour le deuxième, un disque ouvert.

Pour le troisième, la partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

Solution de 25 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$$0 = \sum \lambda_k (z - x_k) \text{ avec } \lambda_k = \frac{1}{|z - x_k|^2}.$$

6. Fonctions convexes

Solution de 26 :

1. Il suffit de composer l'inégalité de convexité avec la fonction croissante.
2. Composer avec l'exponentielle.

Solution de 27 :

Vérifier que $((1-t)f(x) + tf(y))((1-t)g(x) + tg(y)) \leq (1-t)f(x)g(x) + tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

Solution de 28 :

Elle est convexe, en passant par la définition, directement.

Solution de 29 : Inégalité de Bernoulli

$f : x \mapsto x^{n+1}$ est convexe, sa tangente en 1 a pour équation $y = (n+1)(x-1) + 1$.

Solution de 30 :

Concavité de $\ln \circ \ln$.

Solution de 31 :

Convexité de $g : x \mapsto x^2 - 2f(x)$ appliquée en $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1$.

Solution de 32 :

En notant θ_k les angles au centre, pour un n -gone inscrit dans un cercle de rayon R , le périmètre est $\sum_{k=1}^n 2R \sin \theta_k$ avec $\sin$ concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution de 33 : Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP - Écrit Centrale)

Indications :

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.

$$3. \gamma = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Corrigé :

1. Définissons, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$ sur le segment $[a, b]$. En utilisant la convexité de ϕ ,

$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right) = \phi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$

Mais $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt,$$

ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »... On conclut donc.

2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\phi(f(t)) \geq \phi(\gamma) + (f(t) - \gamma) \phi'(\gamma)$$

On intègre entre a et b ($a < b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne

$$\int_a^b \phi(f(t)) dt \geq (b-a) \phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t) dt - \gamma(b-a)\right) \phi'(\gamma)$$

En particulier, prenons $\gamma = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right)^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t)dt$$

ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b 1 \times f(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2 dt\right) \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0, +\infty[$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{b-a}{\int_a^b f(t)dt} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$$

ou encore

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)dt\right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt\right)$$

(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :

$$1 \leq \left(\int_0^1 f(t)dt\right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt\right)$$

Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

Solution de 34 :

Convexité de $x \mapsto \ln(1+e^x)$.

Solution de 35 :

Sinon, si on a $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Si $z > y$, $\tau_x(y) \leq \tau_x(z)$ donne $f(z) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Si on a $x < y$ tels que $f(x) > f(y)$. Si $z < x$, $\tau_x(z) \leq \tau_x(y)$ donne $f(z) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Sur $\mathbb{R}^+$, une demi-droite convient, ou $x \mapsto e^{-x}$.

Solution de 36 :

Si $x > 1$, $\tau_0(1) \leq \tau_0(x)$ donne $f(x) \geq (f(1)-f(0))x + f(0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Solution de 37 : Branche infinie d'une fonction convexe

1. Utiliser la croissance d'une fonction taux d'accroissement en un point quelconque.

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x} \tau_1(x) + \frac{1}{x}$ qui a une limite finie ou $+\infty$ par théorème de la limite monotone.

2. Remarquer que ℓ est aussi la limite de tout taux d'accroissement qui est croissant.

Si $x \leq y$, $\tau_x(y) \leq \ell$ donne $f(y) - \ell y \leq f(x) - \ell x$ et conclure par le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

7. Intégrales sur des segments

A. Calculs de primitives et d'intégrales

Solution de 38 :

Indication :

- | | | | |
|---|-------|----------------------|-------------------------|
| 1. IPP | 3. CV | 6. DES | 8. DES |
| 2. IPP et transformer $\sin^2$ et linéariser. | 4. CV | 7. Méthode classique | 9. $+\dots-\dots$ ou CV |
| 5. Direct | | | |

Réponses :

- | | |
|---|--|
| 1. $t \operatorname{sh} t - e^{-t} + C \ (\mathbb{R})$ | $I_2 =]-1, 0[$ ou $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$ |
| 2. $\frac{1}{3} t \cos^3 t - t \cos t + \frac{2}{3} \sin t + \frac{1}{9} \sin^3 t + C \ (\mathbb{R})$ | 7. $\frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 2) - \operatorname{Arctan}(t + 1) + C \ (R)$ et $\operatorname{Arctan}(t - 1) + C \ (\mathbb{R})$ |
| 3. $2 \operatorname{Arctan} \sqrt{t} + C \ (\mathbb{R}_*^+)$ | 8. $t + \frac{1}{2} \ln \left \frac{t-1}{t+1} \right - \operatorname{Arctan} t + C_k$ sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 1[$ ou $I_3 =]1, +\infty[$ |
| 4. $\frac{\ln(1 + \ln^2 t)}{2} + C \ (\mathbb{R}_*^+)$ | 9. $t - \ln(e^t + 1)$ |
| 5. $\frac{\operatorname{Arctan} t^6}{6} + C \ (\mathbb{R})$ | 10. $t - \frac{1}{2} \ln(e^{2t} + 1)$ |
| 6. $\frac{\ln t^2 - 1 - 2 \ln t }{2} + C_k \ (I_1 =]-\infty, -1[$ ou | |

B. Manipulations d'intégrales

Solution de 40 :

Intégrer $g : t \mapsto f(t) - t$.

Solution de 41 :

Appliquer le TAF à $\ln(f)$ sur $[x, x + 1]$.

Réponse : e^a .

Solution de 42 :

Vérifier que $I_n \rightarrow 1$ (intuitif) en majorant $|I_n - 1|$.

Puis faire une IPP dans cette majoration.

Réponse : $-\frac{\ln 2}{n}$.

Solution de 45 :

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C. Intégrale dépendant des bornes

D. Sommes de Riemann

Solution de 49 :

Utiliser une somme de Riemann.

E. Formules de Taylor

Solution de 51 :

1. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x + h$ et entre x et $x - h$.
2. Déterminer le minimum de $\frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ à l'aide d'une étude de fonction.

Solution de 52 :

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et a : (1)
Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et b : (2)
Éliminer les $f'(x)$ avec $(b - x)(1) + (x - a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

Solution de 53 :

Appliquer trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.
Réponse : $f'''(a)$.