Séries à termes de signe constant

Solution de 3 :

Si $\alpha=0$, la série diverge grossièrement, sinon, $\text{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ ce qui dit... absolument rien bien sûr.

L'idéal serait d'avoir un équivalent, on n'a pas cela dans les formulaires, mais on sait que $\sin x\sim x$ au voisinage de 0, donc, avec un calcul classique à savoir faire (avec discussion sur le signe...)

$$\text{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)\sim\sin\left(\text{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)\right)=\sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^2}=\sqrt{\frac{2n^\alpha+1}{(1+n^\alpha)^2}}\sim\frac{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}{n^\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}>0$$

Par comparaison de séries à termes positifs et critère de Riemann,

$$\boxed{\sum\text{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)\text{ converge si et seulement si }\alpha>2}$$

(ce qui tient compte du cas $\alpha=0$).

Solution de 5 :

1. $\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)\sim\pi(2-\sqrt{3})^n$ terme général positif de série géométrique convergente.
2. Développer avec le binôme de Newton et remarquer qu'il ne reste que des terme d'indice pair faisant disparaître les racines.
3. D'après la question précédente, $\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)=-\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$. Il s'agit donc d'un terme général de série convergente.

Solution de 6 :

On écrit

$$a^{\ln n}=e^{\ln n\ \ln a}=n^{\ln a}$$

puis on est ramené aux séries de Riemann.

Solution de 8 : Règle de Raabe-Duhamel

1. On obtient $y_{n+1}-y_n=\alpha\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et on conclut par absolue convergence.
2. D'après la question précédente, $y_n\to\ell\in\mathbb{R}$, donc $n^\alpha x_n\to e^\ell$: $\lambda=e^\ell$ convient.
3. Comparaison à une série de Riemann.
4. (a) Utiliser la question précédente en remarquant que, par récurrence, tous les $u_n>0$ et, en développant, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+a}{n+b}=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)\dfrac{1}{1+\frac{b}{n}}=1-\dfrac{b-a}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) Récurrence.
   (c) On a $(n+a)u_n\sim\dfrac{\lambda n}{n^{b-a}}=\dfrac{\lambda}{n^{b-a-1}}\to0$ donc en passant à la limite dans la question précédente, on obtient $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\dfrac{1-b}{a-b+1}u_0.}$

Séries à termes quelconques

Solution de 10 :

1. TSSA
2. Développement asymptotique
3. Développement asymptotique
4. Développement asymptotique
5. Divergence : Calculer S_{2n} en séprant les termes d'ordre pair et imapir pour faire apparaître une série à termes positifs divergente.
6. Développement asymptotique

Solution de 13 :

On peut remarquer qu'il y a facilement divergence grossière lorsque $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Pour traiter le cas général, on cherche un équivalent pour conclure (ou un $\mathcal{O}$ dans le cas de convergence, qui suffit à conclure.) Or

$$u_n\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}=\sqrt{n}\left[1+a\sqrt{1+\frac{1}{n}}+b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right]=\sqrt{n}\left[1+a+\frac{a}{2n}+b+\frac{b}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

donc

$$u_n=(1+a+b)\sqrt{n}+\frac{a+2b}{2\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

D'où une disjonction de cas :

- ★ Soit $\boxed{1+a+b\neq 0}$ et $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n} \to \pm\infty$: il y a $\boxed{\text{divergence grossière.}}$
- ★ Soit $b=-1-a$ et on obtient

$$u_n=-\frac{2+a}{2\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

  - ◦ Soit $\boxed{a\neq -2 \text{ et } b=-1-a}$ et $u_n \sim -\dfrac{2+a}{2\sqrt{n}}$ de signe constant, donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ par comparaison à une série de Riemann divergente.
  - ◦ Soit $\boxed{a=-2 \text{ et } b=1}$ et $u_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge}}$ par comparaison à une série de Riemann convergente.
    On demande dans ce cas précis de calculer la somme.
    Or $\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}=\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$: on reconnaît un télescopage (et on sait déjà que la série est convergente.
    Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)$ est égal à la limite de $-1-\ell$ où ℓ est la limite de $\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$, nécessairement finie.
    Or, en multipliant par la quantité conjuguée, $\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\dfrac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell=0$.
    Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)=-1.}$

Solution de 15 :

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

La série harmonique alternée est convergente d'après le théorème spécial sur des séries alternée. On sait même calculer sa somme $-\ln 2$ soit à l'aide d'une intégrale, soit en utilisant le développement (classique aussi) de $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. Car la somme partielle

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1}$$

en séparant les termes d'indices pairs et impairs. Puis, comme dans Wallis, la somme des termes d'indices pairs se calcule facilement et la somme des termes d'indices impairs s'exprime à l'aide de l'autre somme. En effet,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} H_n$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n.$$

Donc

$$S_{2n} = H_n - H_{2n} = \ln n + \gamma - \big(\ln(2n) + \gamma\big) + \mathrm{o}(1) = -\ln 2 + \mathrm{o}(1)$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$. Calcul à savoir faire.

Revenons à l'exercice. Plutôt que de risquer d'écrire des bêtises, on revient à des sommes finies.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{p} \frac{(-1)^k}{k} &\underset{k=j+1}{=} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{j=n+1}^{p-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} + \frac{(-1)^p}{p+1}
\end{aligned}$$

Or $\frac{(-1)^p}{p+1} \to 0$ et $\sum \frac{(-1)^k}{n(n+1)}$ converge soit par le TSSA, soit car elle converge absolument, vu que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (télescopique) ou alors que $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.

Donc, en faisant $p \to +\infty$, $\boxed{R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.}$

2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

Comme $R_{n+1} = R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, on en déduit que $2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

Comme le TSSA s'applique à $\sum \frac{(-1)^k}{n(n+1)}$ donc $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $2R_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et enfin $\boxed{R_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}}$.

Comme le signe n'est pas constant, il ne faut surtout pas se précipiter pour en déduire la nature de la série de terme général R_n.

Cependant, dans le calcul précédent, on avait plus précisément $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $R_n = u_n + v_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ et $v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. $\sum u_n$ converge par TSSA et $\sum v_n$ converge car elle converge absolument par comparaison de séries à termes généraux positifs.

Finalement, $\boxed{\sum R_n \text{ converge.}}$

Solution de 16 : Transformation d'Abel

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels ou complexes, (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels. Démontrer :

$$\sum_{n=0}^{p} v_n u_n \;=\; v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n \quad .$$

La méthode la plus efficace est peut-être la récurrence. Mais on ne fait qu'une vérification, on ne voit pas comment la formule « apparaît ».

On peut aussi (sans faire de récurrence) partir du membre de droite pour essayer de parvenir au membre de gauche, ce qui est raisonnable, car il est plus naturel de partir de l'expression la plus compliquée pour la ramener à l'expression la plus simple. Les calculs sont les suivants et se résument par : on coupe en deux, on réindexe une des sommes, on les rassemble. Notons qu'on fait une réindexation sans changer le nom de l'indice, ce qui n'est pas particulièrement recommandé (risques d'erreur accrus) sauf dans des cas particulièrement simples comme ici.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n &= \sum_{n=0}^{p-1} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p-1} v_{n+1} S_n \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} v_n S_n - \sum_{n=1}^{p} v_n S_{n-1} \\
&= v_0 S_0 - v_p S_{p-1} + \sum_{n=1}^{p-1} v_n (S_n - S_{n-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} v_n u_n - v_p S_{p-1} \\
&= \sum_{n=0}^{p} v_n u_n - v_p S_p
\end{aligned}$$

La troisième méthode est de partir du membre de gauche, en remarquant que la manière naturelle de faire intervenir les S_n est d'écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$ (quitte à poser $S_{-1} = 0$ pour que ce soit valable si $n = 0$). On écrit donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p} u_n v_n &= \sum_{n=0}^{p}(S_n - S_{n-1})v_n\\ &= \sum_{n=0}^{p} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p} v_n S_{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{p} v_n S_n - \sum_{n=1}^{p} v_n S_{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{p} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p-1} v_{n+1} S_n\\ &= v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n\end{aligned}$$

Ce n'est pas la méthode la plus simple, mais on voit comment on « trouve » la formule.

2. On reprend les notations de la question précédente. Démontrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée et la suite (v_n) à termes positifs, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
   Soit M tel que, pour tout n, $|S_n| \leqslant M$. Alors, pour tout n,
   $$|(v_n - v_{n+1})S_n| \leqslant (v_n - v_{n+1})M$$
   Le majorant est le terme général d'une série convergente (série télescopique associée à une suite convergente). Donc $\sum (v_n - v_{n+1})S_n$, absolument convergente, converge. De plus, la suite $(v_p S_{p-1})$ converge (vers 0) comme produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0.
3. Retrouver le théorème sur les séries alternées en utilisant le résultat précédent.
   Prenant $u_n = (-1)^n$, les sommes partielles de la série (divergente) $\sum u_n$ sont bornées. Si on veut être plus précis, on a $S_n = 1$ si n est pair, $S_n = 0$ si n est impair, donc bien évidemment la suite (S_n) est bornée.
4. Etudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de la série
   $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$
   (on pourra utiliser pour certaines valeurs de θ et α le résultat de la deuxième question).
   Si $\alpha \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
   Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue (Riemann).
   Les cas où il n'y a ni convergence absolue ni divergence grossière sont les cas $0 < \alpha \leqslant 1$. On pose alors $u_n = e^{in\theta}$; si la suite (S_n) est bornée, on pourra conclure à la convergence par le résultat précédent. Or, si $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$,
   $$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\end{aligned}$$
   et donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad |S_n| \leqslant \dfrac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$. Donc la suite (S_n) est bornée.
   Si $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$, le terme général de la série est $1/n^\alpha$, on retombe sur une série de Riemann divergente dans le cas $0 < \alpha \leqslant 1$.
   Finalement la série converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(0 < \alpha \leqslant 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z})$.

5. On se place de nouveau sous les hypothèses de la deuxième question. On définit

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k$$

Si M est tel que $\forall n \in \mathbf{N} \quad |S_n| \leqslant M$, trouver un majorant de $|R_n|$ en fonction de M et d'un terme de la suite v.

Attention à ne pas écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (S_k - S_{k-1}) v_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k v_k - \sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} S_k \end{aligned}$$

car à la deuxième ligne du calcul on sépare une somme de série convergente en deux « sommes » de séries non a priori convergentes, donc en deux termes qui n'existent pas. On résout cette difficulté en travaillant d'abord sur les sommes partielles avant de prendre les limites.

De

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} v_{k+1} S_k \\ &= S_{n+p} v_{n+p} - v_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) S_k \end{aligned}$$

on déduit, en prenant la limite quand $p \to +\infty$,

$$R_n = -v_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) S_k$$

et donc

$$|R_n| \leqslant M \left(v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \right) = 2M\, v_{n+1}$$

Calcul de sommes

Comparaison avec des intégrales

Solution de 21 :

$\frac{2}{3} n \sqrt{n}$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ continue et croissante.

Solution de 22 :

$n \ln n$ avec $f : x \mapsto \ln x$ continue et croissante.

Solution de 23 :

Utiliser $f : t \mapsto \dfrac{x^t}{1+x^t}$.

Sommation des relations de comparaison

Solution de 25 :

1. On remarque que $u_n \sim v_n$ et ce sont des termes généraux positifs de séries convergentes. Par sommation des équivalents dans le cas de convergence,

$$\boxed{R_n} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - 0 \boxed{\sim \frac{1}{n}}$$

en reconnaissant une série télescopique.

2. On calcule $\boxed{w_n = u_n - v_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^3} \sim \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}.}$

3. On a déjà, avec la première question, $R_n = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Appliquons de nouveau de le théorème de sommation des équivalents dans le cas de convergence avec la question précédente. On obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = R_n - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = R_n - \frac{1}{n+1} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Or, en décomposant en éléments simples et en reconnaissant un télescopage,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+3}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - 0 = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

On obtient alors

$$R_n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

et finalement $\boxed{R_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).}$

Solution de 27 : Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Très classique, vu en cours. Pour montrer que la suite converge, on montre que la série télescopique associée converge. Or si $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n - \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n - \ln n$ est la somme d'un terme général de série télescopique convergente et d'un terme général de série absolument convergente donc convergente par comparaison à une série de Riemann (positive) convergente, donc est un terme général de série convergente, et par suite, $\boxed{\text{la suite } (H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \gamma \in \mathbb{R}.}$

Remarque : On ne sait que peu de choses sur cette constante. Est-elle rationnelle ? irrationnelle ? Algébrique ? Transcendante ?

2. Là aussi, c'est classique et déjà vu. Par comparaison à une intégrale, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[2, +\infty[$ de primitive $t \mapsto \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}$, on a l'encadrement

$$\int_n^p \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{p+1} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{p-1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

puis en faisant $p \to +\infty$

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

d'où par encadrement $\boxed{R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$

3. On calcule comme dans la première question en poussant plus loin le développement

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $t_{n+1} - t_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ et par comparaison de termes généraux positifs de séries convergentes, $\sum (t_n - t_{n+1})$ converge et les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (t_k - t_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

soit, avec $t_n \to 0$, et la question précédente pour $\alpha = 2$,

$$t_n \sim \frac{1}{2\cdot 1\cdot n} = \frac{1}{2n}$$

donc $\boxed{t_n \sim \frac{1}{2n}.}$ Ainsi, $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$

4. Puis en posant $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(n+1)} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{1}{6n^3}$ terme général positif de série convergente, donc par sommation dans le cas de convergence, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{6k^3}$$

ce qui donne $-u_n \sim \dfrac{1}{6\cdot 2n^2}$ en utilisant la question 2, soit $u_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$, ce qui permet de conclure $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).}$

5. Avec le calcul déjà vu en cours,

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, donc (u_n) converge et les intégrales de Wallis permettent de trouver que $u_n \to \mathrm{e}^{\sqrt{2\pi}}$. On pose alors $v_n = u_n - \mathrm{e}^{\sqrt{2\pi}}$ et on reprend le calcul

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$$

Donc par sommation dans le cas de convergence, les termes étant positifs,

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{12k^2}$$

Donc

$$v_n \sim \frac{1}{12n}$$

et $v_n = \dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Puis, avec $w_n = v_n - \dfrac{1}{12n}$, on calcule [1] $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{120n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ d'où toujours sur le même principe, $w_{n+1} - w_n \sim \dfrac{1}{120n^4}$ puis $-w_n \sim \dfrac{1}{120\cdot 3n^3}$ et $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{12n} - \dfrac{1}{360n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Ainsi, $\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = \mathrm{e}^{u_n} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \sqrt{2\pi}\left(\left(\dfrac{1}{12n} - \dfrac{1}{360n^3}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{144n^2} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1728n^3}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$.

On obtient donc, mieux que ce qui était attendu,

1. En réalité, j'ai utilisé `xcas` :

```
series(1 - (n + 1/2) * ln(1 + 1/n) - 1/(12*(n + 1)) + 1/(12*n), n=+infinity, 3)
```

$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{188n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).}$$