## Suites (révisions)

### Solution de 7 : Moyennes et suites de Schwob

1. Ne pose pas de réelle difficulté.
2. On a envie de montrer que les suites sont adjacentes, mais on se casse vite les dents sur le fait que la différence tend vers 0. L'idée est de reprendre le principe de la convergence dans ce cas, sans montrer directement qu'elles sont adjacentes.
   On arrive facilement à montrer que pour tout $n \geqslant 1$ $v_n \leqslant u_n$, puis que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroît et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ croît.
   Mais on a aussi que $(un)_{n\geqslant 1}$ est minorée par $v_1$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par $u_1$.
   Les deux suites sont donc convergente, et en passant à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$, on obtient que les deux limites sont égales.
3. Comme dans la question précédente, on montre que pour tout $n \geqslant 1$ $v_n \leqslant u_n$, puis que $(un)_{n\geqslant 1}$ décroît et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ croît, et qu'elles convergent vers une même limite avec exactement les mêmes arguments.
   Puis on remarque astucieusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$ et on en déduit que la limite commune vaut $\sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{ab}$.

### Solution de 8 :

Intercaler un $q$ entre $\ell$ et $1$ pour comparer à une suite géométrique à partir d'un certain rang.

## Analyse asymptotique (révisions)

### Solution de 10 : ex CCINP 1

1. Supposons $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 > 0$ donc à partir d'un certain rang $\dfrac{u_n}{v_n} > 0$ et alors
   $$\boxed{u_n \text{ et } v_n \text{ sont de même signe à partir d'un certain rang.}}$$
2. Au voisinage de $+\infty$, $\operatorname{sh}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\tan\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
   Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$.
   On en déduit, d'après 1., qu' $\boxed{\text{à partir d'un certain rang, } u_n \text{ est négatif.}}$

### Solution de 13 :

Réponse : $(-1)^n \dfrac{\pi}{3n}$.

### Solution de 14 :

1. On étudie la fonction $f : x \mapsto \tan x - x$. On trouve qu'elle est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$ donc induit une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$ sur
   $$f\left(\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[\right) = ]-\infty, +\infty[$$
   en calculant les limites.
   Le théorème de la bijection assure donc bien $\boxed{\text{la bonne définition de } u_n.}$

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{\pi}{2} + n\pi < u_{n+1}$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$ Comme, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -\frac{\pi}{2} + n\pi$, $\boxed{u_n \to +\infty.}$
3. Comme $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2} + n\pi$, par encadrement, $\boxed{u_n \sim n\pi.}$
4. On a $v_n = u_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et $\tan v_n = \tan u_n = u_n$ par $\pi$ périodicité de la tangente et par définition de $u_n$.
   Donc, par définition, $v_n = \operatorname{Arctan} u_n \to \frac{\pi}{2}$.
   Ainsi, $\boxed{u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1).}$
5. On a aussi $v_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{u_n}$ pour $n \geqslant 1$ car $u_n > 0$.
   Comme $u_n \sim n\pi$, $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc
$$v_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
   on obtient $\boxed{u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)}$

**Solution de 16 :**

Xcas : `series((tan(2*x)+tan(x+pi/4))*sin(x-pi/4)^2, x=pi/4, 1).`
Réponse : $-3\frac{x-\pi/4}{2} + (x-\pi/4)^2 \cdot order\_size(x-\pi/4)$

**Solution de 17 :**

Utiliser sin.
Réponse : $\sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

**Solution de 18 :**

Réponses avec xcas (qui existe aussi en appli mobile).
Par exemple, pour le premier `series(x / (exp(x) - 1), x = 0, 4)` donne
$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o\left(x^4\right).$$
Pour le dernier, pas de xcas !!
Voir par exemple que $\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o\left(x^{1000}\right)$ pour continuer...
Réponse : $x + \frac{x^{1000}}{1000!} + o\left(x^{1000}\right)$.

**Solution de 19 :**

Avec xcas....

1. `series(sqrt(sin(x)) - sqrt(sinh(x)), x=0, 3)` donne :
$$-\frac{\sqrt{x}\cdot x^2}{6} + \sqrt{x}\cdot x^3 \cdot order\_size(x).$$

2. Demandez à xcas.
3. Là, il faut discuter suivant les valeurs de $a$ et de $b$... Attention aux équivalents à $0$ !!!

**Solution de 20 :**

Méthode :

- Utiliser le théorème de Taylor-Young pour justifier que le DL existe (théorème de la bijection + non annulation de la dérivée de $f$ assure que $f^{-1}$ existe et a la même classe que $f$...)
- Puis utiliser un argument de parité pour réduire le nombre de cœfficients inconnus dans le DL.
- Enfin, $\left(f^{-1}\right)'(0)$ est facile à obtenir, ce qui donne un cœfficient gratuitement.
- Puis utiliser le fait que $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ ou bien que $f^{-1}(f(x)) = x$ et une composition de DL puis l'unicité de celui-ci pour trouver les deux derniers cœfficients.

**Solution de 21 :**

D'après xcas : `series(ln(x*tan(1/x)), x=+infinity, 6)`

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{3} + 7\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^4}{90} + \left(\frac{1}{x}\right)^6 \cdot order\_size\left(\frac{1}{x}\right)$$

**Solution de 22 :**

J'ai aussi demandé à `xcas` avec `limit`

1. $-\dfrac{1}{4}$
2. $\dfrac{1}{3}$
3. $\mathrm{e}^{-1}$
4. $2$
5. $\dfrac{4}{15}$