

## SUITES (RÉVISIONS)

**1** Si  $A$  et  $B$  sont deux parties non vides majorées de  $\mathbb{R}$ , étudier les bornes supérieures de  $A \cup B$ ,  $A + B$  et  $\lambda A$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**2** Étudier la convergence de la suite de terme général  $u_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
Lorsqu'il y a une limite finie  $\ell$ , donner un équivalent de  $u_n - \ell$ .

**3** Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

**4** Soit  $u$  une suite telle que  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  convergent. Prouver que  $u$  converge.

### 5 Théorème de Cesàro – lemme de l'escalier

1. Prouver le théorème de Cesàro : si  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  telle que  $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{C}$ , alors  $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow \ell$ , et le résultat est toujours valable si  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  et  $\ell = \pm\infty$ . La réciproque est-elle vraie ?
2. En déduire le lemme de l'escalier : si  $u_{n+1} - u_n \rightarrow \ell$  alors  $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$ .
3. Montrer que si  $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ , alors  $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$ .
4. Déterminer les limites des suites de terme général  $\left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ ;  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ;  
 $\frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n}$ ;  $\frac{\sqrt[n]{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}}{n}$ ;  $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(3n)!}$ .

### 6 Irrationalité de $e$

On pose  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ . Montrer que les deux suites convergent vers une même limite : on admettra qu'elle vaut  $e$ . En déduire que  $e$  est irrationnel.  
On pourra remarquer que si  $e = \frac{p}{q}$ ,  $u_q < e < v_q$ .

### 7 Moyennes et suites de Schwob

1. Les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs  $a, b$  sont respectivement  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ ,  $\sqrt{ab}$ ,  $\frac{a+b}{2}$ . Montrer que ces nombres sont ainsi rangés dans l'ordre croissant.
2. Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels strictement positifs. On définit les suites  $u$  et  $v$  par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ .  
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ . On ne peut pas l'exprimer simplement avec les fonctions usuelles.
3. Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels strictement positifs. On définit les suites  $u$  et  $v$  par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \frac{2}{\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right)}$ .  
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on déterminera.

**8** Soit  $u$  une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose  $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$ .  
(a) Montrer que si  $\ell < 1$  alors  $u_n \rightarrow 0$ .  
(b) Montrer que si  $\ell > 1$  alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .  
(c) Montrer que si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.
2. Mêmes questions si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

### 9 CCINP 43 (suite récurrente ; équation fonctionnelle)

#### ANALYSE ASYMPTOTIQUE (RÉVISIONS)

- Ne pas oublier qu'on ne peut pas en général additionner ou composer avec une fonction (même continue) des équivalents. Obtenir un équivalent nul ne doit (quasiment) jamais arriver ! Bien retenir que  $u \sim v$  si et seulement si  $u = v + o(v)$ . Il faut connaître l'échelle de comparaison des suites usuelles.
- Pour déterminer un équivalent (pour calculer une limite par exemple) en  $a \neq 0$ , on fait en général un changement de variable  $x = a + h$  pour se ramener au voisinage de 0, et utiliser les équivalents usuels.
- Lorsque l'on demande un DL :
  - La première chose à faire est de se ramener au voisinage de 0 en posant  $h = x - a$  ou  $h = \frac{1}{x}$ . Et, bien sûr, connaître PARFAITEMENT les développements limités usuels (il y a des moyens mnémotechniques (ou logiques) pour les retenir !).
  - Ensuite, voir si des propriétés de parité peuvent simplifier les calculs.
  - Il est souvent difficile de savoir à quel ordre on doit développer chaque terme : prendre le temps d'y réfléchir, et se dire que plus on développe loin, plus on a des chances de faire des erreurs de calcul.
  - Attention à aller assez loin dans le développement d'une composée pour ne pas oublier de terme non négligé.
  - Lorsque l'on a un quotient, on fait en général apparaître du  $\frac{1}{1 \pm u}$ .
  - TOUJOURS mettre les termes d'un DL par ordre croissant de négligeabilité. Cela évite bien des erreurs.
- L'une des principales applications des DL est la recherche d'équivalent (et donc de limite). C'est facile, c'est le terme le plus fort (le premier) qui est l'équivalent le plus simple.
- L'autre utilisation classique est celle en géométrie, cela simplifie beaucoup les calculs d'asymptote (et de position de la courbe par rapport à celle-ci).
- Les développements asymptotiques sont en général difficiles. On retiendra que si on note  $f_k$  le  $k^{\text{e}}$  terme, on a alors  $f_{k+1} \sim f - f_1 - \dots - f_k$ .
- Si vous avez une calculatrice qui fait du calcul formel, elle sait calculer des développements limités. Sinon, aller sur <http://www.xcasenligne.fr> ou installer l'application xcas et utiliser l'instruction `series(f(x), x=a, n)` ou demander gentiment à Wolfram alpha pour obtenir un  $DL_n(a)$  de  $f$  pour vérifier vos calculs.

### 10 ex CCINP 1

1. On considère deux suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non nulle à partir d'un certain rang et  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ .  
Démontrer que  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de :  $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**11** Classer par ordre de prédominance (avec la relation  $\ll$ ) les suites de termes généraux

$$(\ln n)^3, \ln(n^3), \frac{3^n}{n^3}, 2^n, e^{n/2}, (\ln(\ln n))^n, n \ln(\ln n), n \ln n.$$

**12** Classer par ordre de prédominance (avec la relation  $\ll$ ) les suites de termes généraux

$$\frac{1}{n^4}, \frac{\ln n}{n^5}, \frac{2^n}{1+3^n}, 2^{-\ln(\ln n)}, \frac{\ln(\ln n)}{\ln n + n}, \frac{\ln n}{2^n + n^2}, \frac{\tan(1/n)}{1 + \cos^3(1/n)}, (\cos(1/n))^{\sin(1/n)} - 1.$$

**13** Donner un équivalent simple de  $\cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ .

**14** On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  l'unique solution de  $\tan x = x$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ .

1. Montrer que  $u_n$  est bien défini.
2. Étudier la monotonie et la limite de  $(u_n)$ .
3. Trouver un équivalent de  $u_n$ .
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de  $u_n$  en exprimant  $v_n = u_n - n\pi$  à l'aide d'une arctangente.
5. Donner un développement asymptotique à 4 termes de  $u_n$  en réutilisant  $v_n$ .

**15** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = e^{-u_n}$ .

1. Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Déterminer la limite de  $\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. À l'aide du théorème de Cesàro, donner un équivalent de  $v_n$ .
4. Donner un équivalent de  $u_n$ .

**16** Déterminer un équivalent en  $\frac{\pi}{4}$  de  $\left(\tan 2x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**17** Déterminer un équivalent en 1 de  $\operatorname{Arccos}$ .

**18** Déterminer les développements limités

- |                                           |                                              |                                                                         |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1. $DL_4(0)$ de $\frac{x}{e^x - 1}$       | 5. $DL_4(0)$ de $\ln \frac{\ln(1+x)}{x}$     | 10. $DL_3(1)$ de $\sqrt{x}$                                             |
| 2. $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\tan x}$        | 6. $DL_4(0)$ de $(\cos x)^{1+\sin x}$        | 11. $DL_2(0)$ de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$ |
| 3. $DL_4(0)$ de $(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$ | 7. $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+\tan x}$            | 12. $DL_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$ |
| 4. $DL_4(0)$ de $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$     | 8. $DL_5(0)$ de $\frac{x}{\sin x}$           |                                                                         |
|                                           | 9. $DL_6(0)$ de $\operatorname{ch} x \sin x$ |                                                                         |

**19** Déterminer un équivalent simple en 0 de

1.  $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\operatorname{sh} x}$
2.  $\frac{\sin x + \operatorname{sh} x - 2x}{x(\cos x + \operatorname{ch} x - 2)}$
3.  $\sin x + a \tan x + b \sin^3 x$  où  $a, b$  réels

**20** Montrer que l'application  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x e^{x^2} \end{cases}$  admet une application réciproque définie sur  $\mathbb{R}$  et en donner un  $DL_5(0)$ .

**21** Déterminer le  $DL_6$  en  $+\infty$  de  $\ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ .

**22** Étudier les limites

1.  $\frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$  en 0
2.  $\frac{\ln x}{x^2 + x - 2}$  en 1
3.  $x^{\frac{1}{1-x}}$  en 1
4.  $(\pi - 2x) \tan x$  en  $\frac{\pi}{2}$
5.  $\frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1 + \tan x)^{\frac{1}{x}} - e^{\cos \sqrt{x}}}$  en 0