Devoir Libre n° 4

I – Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. On calcule $\boxed{T_2 = 2X\times X - 1}$ donc $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$ et $T_3 = 2X(2X^2-1) - X$ donc $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X.}$

2. Montrons par récurrence sur n (double, ou forte) que

   $\boxed{T_n \text{ est de degré } n\text{, de coefficient dominant } 2^{n-1} \text{ si } n \neq 0\text{, } 1 \text{ sinon, et a la même parité que } n}$ (ce qui s'écrit simplement $T_n(-X) = (-1)^n T_n$).

   Initialisations $T_0 = 1$ est de degré 0, de cœfficient dominant 1 et pair comme 0 ; $T_1 = X$ est de degré 1, de cœfficient dominant $1 = 2^{1-1}$ et impair comme 1.

   Attention : il est ***indispensable*** *d'initialiser aux rangs 0 et 1 à cause des deux prédécesseurs de l'hypothèse de récurrence.*

   Hérédité Si, pour un $n \geqslant 1$, l'hypothèse est vraie aux rangs $n-1$ et n, alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

   Comme T_n est de degré n, $2XT_n$ est de degré $n+1$ et comme T_{n-1} est de degré $n-1$, alors T_{n+1} est de degré $n+1$ et son cœfficient dominant est celui de $2XT_n$.

   Comme celui de T_n est 2^{n-1} par hypothèse de récurrence, le cœfficient dominant de T_{n+1} est $2\times 2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$.

   Enfin, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X) = -(-1)^n 2XT_n - (-1)^{n-1}T_{n-1} = (-1)^{n+1}(2XT_n - T_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1}T_{n+1} \end{aligned}$$

   donc T_{n+1} a même parité que $n+1$.

   La récurrence est établie.

3. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbb{R}$, qu'il contient la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ de $n+1$ vecteurs qui est libre car les polynômes sont non nuls et à degrés étagés (le déterminant de la famille dans la base canonique est $\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 2^0 & & (*) & \\ 0 & 0 & 2^1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2^{n-1} \end{vmatrix} = 1\times 2^0 \times \cdots \times 2^{n-1} \neq 0$).

   Donc $\boxed{(T_0, T_1, \dots, T_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

4. (a) i.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}) + (\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{-a+b} + \mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-a-b} + \mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{-a+b} - \mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{-a-b}}{2} \end{aligned}$$

   donc $\boxed{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch}(a+b).}$

   ii. D'après la question précédente et par des considérations de parité, on a aussi $\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ et donc $\boxed{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\big).}$

   (b) Soit x un réel fixé. Montrons par récurrence sur n (double, à nouveau) que

   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos t) = \cos nt \text{ et } T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} nt.}$

Initialisations $T_0(\cos t) = 1 = \cos(0 \cdot t)$, $T_0(\operatorname{ch} t) = 1 = \operatorname{ch}(0 \times t)$

$T_1(\cos t) = \cos t = \cos(1 \cdot t)$, $T_1(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} t = \operatorname{ch}(1 \times t)$.

Il est à nouveau indispensable d'initialiser aux rangs 0 et 1 à cause des deux prédécesseurs de l'hypothèse de récurrence.

Hérédité Si, pour un $n \geqslant 1$, l'hypothèse est vraie aux rangs $n-1$ et n, alors $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$.

Donc $T_{n+1}(\cos t) = 2\cos t\, T_n(\cos t) - T_{n-1}(\cos t) = 2\cos t \cos nt - \cos(n-1)t$ par hypothèse de récurrence. Or $2\cos x \cos nt = \cos(n+1)t + \cos(n-1)t$, donc $T_{n+1}(\cos t) = \cos(n+1)t$.

Avec un raisonnement exactement similaire vu la question **4.a (iii)**, $T_{n+1}(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}(n+1)t$.

La récurrence est établie.

(c) Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, on a, pour $|x| \leqslant 1$, un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$. Mais alors, d'après la question précédente, $T_n(x) = T_n(\cos t) = \cos nt$. Donc $\boxed{\text{si } |x| \leqslant 1,\ |T_n(x)| \leqslant 1.}$

(d) Comme $\operatorname{ch}(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$, on a, pour $x \geqslant 1$, un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \operatorname{ch} t$. Mais alors, d'après la question **4.b**, $T_n(x) = T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} nt \geqslant 1$. Donc $\boxed{\text{si } x \geqslant 1,\ T_n(x) \geqslant 1.}$

(e) On a, d'après la question **2**, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ et donc $|T_n(-x)| = |T_n(x)|$.

Donc si $x \leqslant -1$, $-x \geqslant 1$ et d'après la question précédente, $\boxed{|T_n(x)| = |T_n(-x)| \geqslant 1.}$

(f) Encore une récurrence, simple cette fois, à $x \geqslant 1$ fixé.

Initialisation On a $T_1(x) = x \leqslant 2^0 x^1$.

Hérédité Soit un $n \geqslant 1$ tel que $T_n(x) \leqslant 2^{n-1} x^n$.

Alors $T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \leqslant 2^n x^{n+1} - T_{n-1}(x) \leqslant 2^n x^{n+1}$ car $T_{n-1}(x) \geqslant 1 \geqslant 0$ d'après la question **d**.

Ce qui établit la récurrence.

Finalement, $\boxed{\text{si } x \geqslant 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,\ T_n(x) \leqslant 2^{n-1} x^n.}$

---

5. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = 0 \iff \cos nx = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad nx = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$.

Mais $0 \leqslant \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \leqslant \pi \iff \dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant n + \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\boxed{\text{les solutions de } T_n(\cos x) = 0 \text{ dans } [0,\pi] \text{ sont les } x_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n.}$

(b) Comme T_n est de degré n, il a au plus n racines distinctes.

Or d'après la question précédente, les $\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ sont racines de T_n. Comme $\cos$ est injective sur $[0,\pi]$ (strictement décroissante), elles sont deux à deux distinctes, et il y en a exactement n.

Finalement, $\boxed{T_n \text{ a exactement } n \text{ racines distinctes, réelles, et toutes dans } [-1,1].}$

Remarque : la question **4.e** *nous disait déjà que T_n n'a aucune racine hors de* $[-1,1]$.

(c) Comme T_n est de degré n et possède n racines réelles deux à deux distinctes, il est scindé sur $\mathbb{R}$. Comme de plus son cœfficient dominant est 2^{n-1} d'après la question **2**, on a la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$: $\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \right).}$

II – Étude de $M(P) = N_{\infty,[-1,1]}(|P(x)|)$

6. La fonction $x \mapsto |P(x)|$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, $\boxed{M(P) \text{ existe bien.}}$

---

7. On a déjà vu dans la première partie que si $|x| \leqslant 1$, $|T_n(x)| \leqslant 1$. Or pour $x = 1 = \cos(0)$, $|T_n(\cos 0)| = |\cos n0| = 1$. Donc $\boxed{M(T_n) = 1.}$

---

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme dans la première partie, on résout sur $[0,\pi]$ l'équation $|T_n(\cos t)| = |\cos(nt)| = 1$.

$$|\cos(nt)| = 1 \iff nt \equiv 0[\pi] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\quad nt = k\pi \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\quad t = \frac{k\pi}{n}.$$

Or $0 \leqslant \dfrac{k\pi}{n} \leqslant \pi \iff 0 \leqslant k \leqslant n$.
Par bijectivité (et décroissance) de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, les solutions de $|T_n(\cos t)| = 1$ sont exactement $\boxed{\text{les } \alpha_k = \cos\dfrac{k\pi}{n} \text{ pour } k \in [\![0,n]\!].}$

---

9. On a, classiquement, $\boxed{L_k(\alpha_j) = \delta_{k,j}.}$

---

10. $\mathscr{B}$ possède $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, reste à montrer qu'ils sont linéairement indépendant.
Or si $y_0 L_0 + \cdots + y_n L_n = 0$, alors en évaluant en α_k pour $k \in [\![0,n]\!]$, on obtient directement $y_k = 0$.
Donc $\boxed{\mathscr{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$
On pourrait aussi se contenter de parler de l'unicité du polynôme interpolateur de Lagrange de degré au plus n.
Autre réponse possible : $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme (car de noyau nul et même dimension finie au départ et à l'arrivée), et $\mathscr{B}$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme u^{-1}.

---

11. Là encore, le programme de première année nous souffle que

$$\boxed{\text{ces coordonnées sont } (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)).}$$

On le retrouve en remarquant que $P - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$ est un polynôme de degré au plus n ayant les α_k comme racines, soit $n+1$ racines deux à deux distinctes, donc est le polynôme nul.

---

12. D'après la question précédente, il suffit de calculer $T_n\left(\cos\dfrac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

On a bien $\boxed{T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_k.}$

---

13. Si $x \geqslant 1$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_k(x)$ avec, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $L_k(x) = \displaystyle\prod_{i \neq k} \frac{x - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$ où pour tout i, $x - \alpha_i \geqslant 0$ car $\alpha_i \leqslant 1 \leqslant x$ et où vu l'ordre des α_i, $\alpha_k - \alpha_i > 0$ pour $k+1 \leqslant i \leqslant n$ et $\alpha_k - \alpha_i < 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$ (donc pour k termes).

Ainsi, $(-1)^k L_k(x) = |L_k(x)|$ et on a bien $\boxed{T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|.}$

---

14. Soit $x \geqslant 1$. Vu les questions **II.6** (au début) et **I.4.f** (à la fin),

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k)L_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(\alpha_k)||L_k(x)| \leqslant M(P)\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| = M(P)T_n(x) \leqslant 2^{n-1}M(P)x^n.$$

Ainsi, $2^{n-1}M(P) \geqslant \dfrac{|P(x)|}{x^n}$. Mais P étant unitaire de degré n, $|P(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |x^n| = x^n$ donc $\dfrac{|P(x)|}{x^n} \to 1$.

On a donc bien $\boxed{M(P) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

15. $\boxed{U_n = \dfrac{T_n}{2^{n-1}}}$ convient vu la question **2**.

C'est cette étude qui permet de vérifier que le choix des racines des polynômes de Tchebychev est un meilleur choix dans l'interpolation de Lagrange pour éviter le phénomène de Runge.

III – Étude d'une application linéaire

16. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation,

$$\varphi(P+\lambda Q) = (1-X^2)(P''+\lambda Q'') - X(P'+\lambda Q') = (1-X^2)P'' - XP' + \lambda((1-X^2)Q'' - XQ') = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).$$

De plus, si $n \geqslant 1$, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ dans $(1-X^2)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et finalement, $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Si $n = 1$, $P \in \mathbb{R}_1[X]$, $P'' = 0$ donc $\varphi(P) = -XP' \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\varphi(\mathbb{R}_1[X]) \subset \mathbb{R}_1[X]$.
Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

17. On calcule $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = -X$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\varphi(X^k) = (1-X^2)k(k-1)X^{k-2} - XkX^{k-1} = k(k-1)X^{k-2} - k^2X^k.$$

(On retrouve la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ).

D'où la matrice de φ : $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & (0) \\ & -1 & 0 & 6 & & & \\ & & -4 & 0 & 12 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & -(n-2)^2 & 0 & n(n-1) \\ & & & & & -(n-1)^2 & 0 \\ & & & & & & -n^2 \end{pmatrix}}.$

18. (a)

$$M - \lambda I_{n+1} \notin \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 & & & (0) \\ & -1-\lambda & 0 & 6 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -(n-2)^2-\lambda & 0 & n(n-1) \\ & & & & -(n-1)^2-\lambda & 0 \\ & & & & & -n^2-\lambda \end{pmatrix} \notin \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

$$\iff \exists\, k \in [\![0, n]\!],\quad -k^2 - \lambda = 0$$

$$\iff \exists\, k \in [\![0, n]\!],\quad \lambda = -k^2$$

car une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si un de ses cœfficients diagonaux est nul. (On aurait aussi pu calculer $\det(M - \lambda I_{n+1}) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(-\lambda - k^2)$.)

Il existe exactement $n+1$ nombres réels λ tel que $M-\lambda I_{n+1}$ n'est pas inversible.

ce sont les $\lambda_k = -k^2$ pour $k \in \{0,\ldots,n\}$.

(b) Soit $k \in \{0,\ldots,n\}$.

$$M-\lambda_k I_{n+1} = M + k^2 I_{n+1} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 2 & & & (0) \\ & k^2-1 & 0 & 6 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & k^2-(n-2)^2 & 0 & n(n-1) \\ & & & & k^2-(n-1)^2 & 0 \\ & & & & & k^2-n^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes C_j pour $j \neq k$ de la matrice ainsi obtenue sont de la forme $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ k^2-j^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{e}}$ position,

avec $k^2-j^2 \neq 0$. Elles forment donc une famille libre (si $\sum_{j\neq k} \mu_j C_j = 0$, il suffit de regarder successivement les coordonnées numéro n pour annuler μ_n, puis $n-1$ pour annuler μ_{n-1}, puis etc jusqu'à 1 pour annuler μ_1.)

On a donc n colonnes libres dans $M-\lambda_k I_{n+1}$ donc $M-\lambda_k I_{n+1}$ est de rang au moins n.

(c) D'après la question précédente, $\dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda_k \operatorname{id}) \geqslant n$. Mais comme, par définition, des λ_k, $\varphi - \lambda_k \operatorname{id}$ n'est pas inversible, ce rang ne peut être égal (ni supérieur !) à $n+1$. C'est donc que $\boxed{\dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda_k \operatorname{id}) = n.}$

Puis, par théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_k \operatorname{id}) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda_k \operatorname{id})$.

Donc $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_k \operatorname{id}) = 1.}$

19. (a) Si $k \in \{1,\ldots,n\}$ et si $(U_0,\ldots,U_{k-1})$, soient $\mu_1,\ldots,\mu_k \in \mathbb{R}$ tels que $\mu_0 U_0 + \cdots + \mu_k U_k = 0$.
En appliquant φ à cette identité, par linéarité de celui-ci, $\mu_0 \varphi(U_0) + \cdots + \mu_k \varphi(U_k) = \varphi(0) = 0$.
Puis, par définition des U_p, $\mu_0 \lambda_0 U_0 + \cdots + \mu_k \lambda_k U_k = 0$.
En retranchant cette dernière à λ_k fois la première, on obtient

$$\mu_0(\lambda_0 - \lambda_k) U_0 + \cdots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) U_{k-1} = 0.$$

Ensuite, par indépendance linéaire de $U_0,\ldots,U_{k-1}$, on a $\mu_0(\lambda_0-\lambda_k) = \cdots = \mu_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k) = 0$.
Enfin, comme les λ_p sont deux à deux distincts, on en déduit que $\mu_0 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$. Puis en revenant à la première équation qui devient $\mu_k U_k = 0$, comme $U_k \neq 0$, $\mu_k = 0$.

On a donc démontré que la famille $(U_0,\ldots,U_k)$ est libre.

(b) Par récurrence sur n, l'hérédité est donnée par la question précédente, l'initialisation par le fait que (U_0) où $U_0 \neq 0$ est une famille libre.

20. (a) On sait d'après la partie I que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos nx$. En dérivant ces fonctions dérivables, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\sin x\, T_n'(\cos x) = -n \sin(nx)$ et donc $\boxed{\sin x\, T_n'(\cos x) = n \sin(nx).}$

(b) Soit $u \in [-1,1]$. On a $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x = u$. Alors, d'après les propriétés de T_n et vu la question précédente,

$$\begin{aligned}(1-u^2)T_n'(u)+nuT_n(u)-nT_{n-1}(u) &= (1-\cos^2 x)T_n'(\cos x)+n\cos x\, T_n(\cos x)-nT_{n-1}(\cos x)\\ &= \sin^2 x\, T_n'(\cos x)+n\cos x\cos nx - n\cos(n-1)x\\ &= n\sin x\sin(nx)+n\cos x\cos nx - n\cos(nx-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } u\in[-1,1],\ (1-u^2)T_n'(u)+nuT_n(u)-nT_{n-1}(u)=0.}$

(c) D'après la question précédente, le polynôme $(1-X^2)T_n'+nXT_n-nT_{n-1}$ admet une infinité de racines, donc $\boxed{(1-X^2)T_n'+nXT_n-nT_{n-1}=0.}$

(d) Par récurrence sur n.

- **Initialisations** : $\varphi(T_0)=0=-0^2T_0$ et $\varphi(T_1)=-X=-1^2T_1$.
- **Hérédité** : Si, pour un $n\geqslant 1$, $\varphi(T_{n-1})=-(n-1)^2T_{n-1}$ et $\varphi(T_n)=-n^2T_n$. Alors $T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(T_{n+1}) &= 2\varphi(XT_n)-\varphi(T_{n-1})\\ &= 2(1-X^2)(T_n+XT_n')'-2X(T_n+XT_n')-(n-1)^2T_{n-1}\\ &= 2(1-X^2)(2T_n'+XT_n'')-2XT_n-2X^2T_n'-(n-1)^2T_{n-1}\\ &= 2X((1-X^2)T_n''-XT_n')+4(1-X^2)T_n'-2XT_n-(n-1)^2T_{n-1}\\ &= 2X\varphi(T_n)+4(-nXT_n+nT_{n-1})-2XT_n-(n-1)^2T_{n-1} \text{ d'après la question précédente}\\ &= -2n^2XT_n-(4n+2)XT_n+(4n-(n-1)^2)T_{n-1} \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= -2(n^2+2n+1)XT_n-(n+1)^2T_{n-1}\\ &= -(n+1)^2(2XT_n-T_{n-1})\\ &= -(n+1)^2T_{n+1}.\end{aligned}$$

- **La récurrence est établie.**

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n,\ \varphi(T_n)+n^2T_n=0.}$

(e) D'après les questions précédentes, $\dim \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_k\,\mathrm{id})=1$ et $T_n\in\operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_k\,\mathrm{id})$. Donc, comme $T_n\neq 0$, $\boxed{T_n \text{ forme une base de la droite } \varphi-\lambda_k\,\mathrm{id}.}$

(f) On a directement, d'après le **d** que $\boxed{\mathcal{M}_{(T_0,\dots,T_n)}(\varphi)=\begin{pmatrix}0 & & & (0)\\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & -n^2\end{pmatrix}.}$

IV – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

21. On a pour tous $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle\in\mathbb{R}$. De plus,

Symétrie Si $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi Q(\cos x)P(\cos x)\,\mathrm{d}x=\langle Q,P\rangle$.

Bilinéarité Si $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'évaluation et de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle &= \int_0^{\pi} (P_1(\cos x) + \lambda P_2(\cos x))Q(\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} P_1(\cos x)Q(\cos x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_0^{\pi} P_2(\cos x)Q(\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle P_1, Q\rangle + \lambda\,\langle P_2, Q\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne la linéarité à gauche, de laquelle découle la linéarité à droite par symétrie.

Positivité Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} (P(\cos x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (les bornes sont bien ordonnées).

Définition Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} (P(\cos x))^2\,\mathrm{d}x = 0$. Alors, comme $x \mapsto (P(\cos x))^2$ est continue et de signe constant sur $[0, \pi]$, elle est identiquement nulle sur $[0, \pi]$.
Ainsi, comme $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, le polynôme P admet l'infinité de réels de $[-1, 1]$ comme racines, c'est donc le polynôme nul.

Finalement, $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

---

22. (a) Si $p \neq q$, $\left\langle T_p, T_q\right\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} T_p(\cos x)T_q(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$ d'après la question **I.4.b**.
Mais, en utilisant les formules de trigonométries,

$$\left\langle T_p, T_q\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]_0^{\pi}$$

Donc $\boxed{\text{si } p \neq q,\ \left\langle T_p, T_q\right\rangle = 0.}$

(b) $\langle T_0, T_0\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(0 \times x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x$ donc $\boxed{\langle T_0, T_0\rangle = \pi.}$
Si $n \neq 0$, on reprend les mêmes calculs que ci-dessus avec $p = q = n$:

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((n+n)x) + \cos((n-n)x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((2n)x)}{2n} + x\right]_0^{\pi}$$

donc $\boxed{\langle T_n, T_n\rangle = \frac{\pi}{2}.}$

(c) On a d'après la question **I.3** que $(T_0, \ldots, T_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et d'après la question **III.2.a**, $T_n \perp T_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc $\boxed{T_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}.}$

(d) On sait que $\langle T_n, T_n\rangle = \dfrac{\pi}{2}$ d'après **III.2.b** et que $T_n = 2^{n-1}X^n + Q$ où $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après **I.2**, et donc $\langle T_n, Q\rangle = 0$ d'après la question précédente.
Donc $\dfrac{\pi}{2} = \langle T_n, T_n\rangle = \left\langle T_n, 2^{n-1}X^n + Q\right\rangle = \left\langle T_n, 2^{n-1}X^n\right\rangle + \langle T_n, Q\rangle = \left\langle T_n, 2^{n-1}X^n\right\rangle = 2^{n-1}\langle T_n, X^n\rangle$.

Finalement, $\boxed{\langle T_n, X^n\rangle = \frac{\pi}{2^n}.}$

---

23. D'après la question **I.3**, $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la question **III.2.a**, cette base est orthogonale.

Enfin, d'après la question **III.2.b**, $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n\right) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X].}$

V – Méthode de quadrature de Gauss [1]-Tchebychev

24. Soit f continue sur $[-1,1]$. Alors $f\circ\cos$ est continue sur $[0,\pi]$ et pour tout $k\in\{0,\dots,p-1\}$,

$$x_{k+1}=\frac{(2k+1)\pi}{2n}\in\left[k\frac{\pi}{n},(k+1)\frac{\pi}{n}\right].$$

donc, d'après le théorème général sur les sommes de Riemman,

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\cos x_{k+1})=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\cos x_k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^{\pi}f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, $\boxed{S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}I(f).}$

---

25. On note, pour $j\in\{0,\dots,n\}$, $c_j=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(jx_k)$.

(a) $\boxed{c_0=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n}$ et $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k\pi-\tfrac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}0$ donc $\boxed{c_n=0.}$

(b) Soit $j\in\{1,\dots,n-1\}$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\right)^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\right)^l=\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\frac{1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}}$$

car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\neq 1$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\right)^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\frac{1-(-1)^j}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}\frac{(-1)^j-1}{2\mathrm{i}\sin\left(j\frac{\pi}{2n}\right)}.$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\right)^k=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}\frac{1-(-1)^j}{2\sin\left(j\frac{\pi}{2n}\right)}.}$

(c) Soit $j\in\{1,\dots,n-1\}$,

$$c_j=\sum_{k=1}^{n}\cos j\frac{(2k-1)\pi}{2n}=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{k\pi}{n}}\right)=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\frac{\pi}{n}}\right)^k\right).$$

Donc, d'après la question précédente, $c_j=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{i}\dfrac{1-(-1)^j}{2\sin\left(j\frac{\pi}{2n}\right)}\right)$ d'où $\boxed{c_j=0.}$

---

26. (a) Soit $p\in\{0,\dots,n-1\}$. Remarquons que $I(T_p)=\left\langle T_p,T_0\right\rangle$ donc $\boxed{I(T_p)=0 \text{ si } p\neq 0 \text{ et } I(T_0)=\pi}$ d'après la partie III.

De plus, $S_n(T_p)=\dfrac{\pi}{n}c_p$. Donc d'après les questions précédentes, $\boxed{S_n(T_0)=\pi \text{ et } S_n(T_p)=0 \text{ si } p\neq 0.}$

---

1. 

Carl Friedrich Gauss (Brunswick 1777 - Göttingen 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Surnommé *le prince des mathématiciens*, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Gauss était un génie particulièrement précoce : à 7 ans (ou 10 selon les sources), il donne la formule calculant $1+2+\dots+100$. À 19 ans, il fut le premier à démontrer la loi de réciprocité quadratique. Parmi ses autres prouesses, on peut citer la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dans sa thèse en 1799, l'invention de la théorie des congruences, la résolution de problèmes de construction à la règle et au compas...Il est considéré comme le fondateur de la géométrie différentielle.

(b) Comme $(T_0,\dots,T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et comme les fonctions I et S_n sont linéaires, l'égalité vu la question précédente de I et de S_n sur la base suffit à conclure que $\boxed{\text{pour tout } P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ I(P)=S_n(P).}$

27. (a) On a $T_nQ=P-R$ donc $\deg(T_nQ)\leqslant\max(\deg P,\deg R)\leqslant\max(2n-1,n-1)=2n-1$. Comme, de plus, $\deg(T_nQ)=\deg T_n+\deg Q=\deg Q+n$, on en déduit $\deg Q\leqslant n-1$ et donc $\boxed{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

(b) Par linéarité de I, on a $I(P)=I(QT_n)+I(R)=\langle Q,T_n\rangle+I(R)$. Comme $T_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ d'après la partie II, et comme $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[x]$ d'après la question précédente, $\boxed{I(P)=I(R).}$

(c) D'après la question précédente et la question 3, pour $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P)=I(R)=S_n(R)$.

Or $S_n(P)=S_n(QT_n)+S_n(R)$ par linéarité et $S_n(QT_n)=\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Q(\cos x_k)T_n(\cos x_k)=0$ car les $\cos x_k$ sont justement les racines de T_n.

Donc $S_n(P)=S_n(R)$ et finalement, $\boxed{\text{pour } P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\ I(P)=S_n(P).}$

28. $I(T_{2n})=\langle T_{2n},T_0\rangle=0$ d'après la partie II car $n\neq0$ et

$$S_n(T_{2n})=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}T_{2n}(\cos x_k)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2nx_k)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)\pi)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)=-\pi$$

Donc $\boxed{I(T_{2n})=0\neq-\pi=S_n(T_{2n}).}$

La méthode de quadrature est donc exacte sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ d'après la question précédente, mais ne l'est pas pour $T_{2n}\in\mathbb{R}_{2n}[X]$. $\boxed{\text{C'est donc une méthode d'ordre } 2n-1.}$

Fin