

Table des matières

2026	Banque CCINP — MP – MPI	1
I	Analyse : exercices 1 à 58	2
II	Algèbre : exercices 59 à 94	61
III	Probabilités – exercices 95 à 112	99

LIENS DIRECTS VERS LES EXERCICES

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112							



ANALYSE : EXERCICES 1 À 58

Exercice 1 : Analyse – Normes non équivalentes et parties fermées

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes? Justifier.

2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $u : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$ Prouver que u est une application continue sur E .

(b) On pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.

Soit $c : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$ On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

(b) On pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F .

Prouver que $c \in \overline{F}$.

F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On ne peut donc pas avoir de $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leq \alpha \|\cdot\|_1$: les normes ne sont pas équivalentes.

2. (a) Le morphisme d'évaluation u est linéaire sur E .

De plus, si $f \in E$, $|u(f)| = |f(0)| \leq 1 \times \|f\|_\infty$ donc u est une application continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(b) On remarque que $F = u^{-1}(\{0\})$ avec u continue sur E et $\{0\}$ fermé de $\mathbb{R}$, donc F est fermée pour $\|\cdot\|_\infty$.

On peut aussi prendre $(f_n)_n \in F^\mathbb{N}$ une suite de fonctions nulles en 0 convergeant uniformément vers une fonction $f \in E$. Comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple, on a alors $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$ donc $f(0) = 0$ ce qui indique que $f \in F$. Par caractérisation séquentielle,

F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\|f_n - c\|_1 = \int_0^{1/n} |nt - 1| dt + \int_{1/n}^1 |1 - 1| dt = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \left[\frac{(1 - nt)^2}{-2n} \right]_0^{1/n}$$

$$\text{donc } \|f_n - c\|_1 = \frac{1}{2n}.$$

(b) D'après la question précédente, $\|f_n - c\|_1 \rightarrow 0$ donc c est limite de la suite $(f_n)_n \in F^\mathbb{N}$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $c \in \overline{F}$.

Mais $c(0) \neq 0$ donc $c \notin F$ et $F \subsetneq \overline{F}$ donc F n'est pas fermée pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 2 : Analyse – DES, DSE et DL d'une fonction rationnelle

On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $] -r, r[$ (où $r > 0$).

Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve

$$f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}.$$

2. D'après le cours, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.

De plus, on a $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent). On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière. Et

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n.$$

C'est-à-dire $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (4n+7) x^n$.

Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f . D'après ce qui précède, $] -1, 1[\subset D$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n (4n+7) x^n$. D'après ce qui précède $R \geq 1$.

Posons, pour tout entier naturel n , $a_n = (-1)^n (4n+7)$.

Pour $x = 1$ et $x = -1$, $|a_n x^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sum (-1)^n (4n+7) x^n$ diverge grossièrement et ainsi $R \leq 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

On en déduit que $D =]-1, 1[$.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

D'après le cours, g est de classe C^∞ sur $] -R, R[$, et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, g^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p! a_p$ (tous les termes pour $n > p$ sont nuls). C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}.$$

(b) f est de classe C^3 sur $] -1, 1[$. Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{p=0}^3 \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^3)$$

Or, d'après les questions précédentes, pour tout entier p , $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = (-1)^p (4p+7)$.

Ainsi, au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{p=0}^3 (-1)^p (4p+7) x^p + o(x^3) = f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

**Exercice 3 : Analyse – Formule de Leibniz**

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.
2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n^{e} d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

1. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On prouve, par récurrence, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

2. g et h sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)! (1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x). »$$

Prouvons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies (dérivée d'un produit).
- Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I . Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I . Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

$$\text{C'est-à-dire } (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) \text{ avec } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0.$$

$$\text{Or, en utilisant la formule de Pascal, on a } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

$$\text{On en déduit que } (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit la récurrence.

Exercice 4 : Analyse – Théorème de la limite de la dérivée

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2. On suppose que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.

En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f , entre x_0 et $x_0 + h$, les hypothèses étant bien vérifiées, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c_h).$$

Quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \rightarrow x_0$. Donc

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell.$$

On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opérations.

g est également dérivable en 0 car si $x \neq 0$, $g(x) = x \times \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} = o(x)$ est un $DL_1(0)$ de g donc

g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Autre argument possible : $\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ car le sinus est borné.

Cependant,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

avec $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ car le sinus est borné, mais $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 car

$$\cos\left(\frac{1}{(n\pi)^{-1}}\right) = (-1)^n.$$

Donc g' n'a pas de limite en 0.

**Exercice 5 : Analyse – Séries de Bertrand**

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Cas $\alpha \leq 0$: en utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.
 (b) Cas $\alpha > 0$: étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

1. (a) Supposons $\alpha \leq 0$. Pour $n \geq 3 > e$,

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} = \frac{(\ln n)^{-\alpha}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

où $\frac{1}{n}$ est un terme général positif de série divergente.

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum u_n$ diverge.

(b) Supposons $\alpha > 0$ et posons $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale, on a, pour $n \geq 3$,

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

donc, pour $N \geq 2$,

$$\int_2^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=2}^N f(n) \leq f(2) + \int_2^N f(t) dt.$$

Comme les termes sont positifs, on peut écrire, dans $[0, +\infty[$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} (\ln t)^{-\alpha} dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{t} (\ln t)^{-\alpha} dt$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} (\ln t)^{-\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \left[\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_2^{+\infty} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + [\ln |\ln t|]_2^{+\infty} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} (\ln t)^{-\alpha} dt < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

On en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. On a

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = -e \left(e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1} - 1 \right)$$

avec $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n} \rightarrow 0$ puis

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim -e \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) \sim \frac{e}{2n}.$$

On a aussi $e^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ et $\ln(n^2 + n) = \ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln n + o(\ln n)$ car $\ln n \rightarrow +\infty$, donc $e^{\frac{1}{n}} \sim 1$, $\ln(n^2 + n) \sim 2 \ln n$ et

$$\frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2} \sim \frac{\frac{e}{2n} \times 1}{(2 \ln n)^2} = \frac{e}{8n(\ln n)^2} \geq 0.$$

Par le cas $\alpha = 2$ dans la question précédente, et par comparaison de séries à termes positifs (au moins à

partir d'un certain rang), $\sum \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ converge.

Exercice 6 : Analyse – Critère de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

1. Comme $\ell < 1$, on peut prendre $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq \ell < q < 1$.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < q$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ (ce qui se retrouve en prenant $\varepsilon = q - \ell > 0$ dans la définition de la limite).

Alors, si $n \geq N$, en reconnaissant un produit télescopique,

$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} < \prod_{k=N}^{n-1} q = q^{n-N}$$

donc

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{q^N} \cdot q^n$$

Comme $q \in]0, 1[$, la série géométrique $\sum \left(\frac{u_N}{q^N} \cdot q^n \right)$ converge, donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

2. La suite $u = \left(\frac{n!}{n^n} \right)_{n \geq 1}$ est à termes réels strictement positifs tels que

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \in [0, 1[\end{aligned}$$

donc, d'après la question précédente, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} \text{ converge.}}$

**Exercice 7 : Analyse – Nature de séries à termes généraux équivalents**

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{\sqrt{n+3} - 1}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

1. (a) Supposons $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 > 0$ donc à partir d'un certain rang $\frac{u_n}{v_n} > 0$ et alors

$$\boxed{u_n \text{ et } v_n \text{ sont de même signe à partir d'un certain rang.}}$$

(b) Supposons $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Comme (v_n) est positive, c'est aussi le cas de u_n à partir d'un certain rang N_1 d'après la question précédente.

Alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ donc il existe un rang N_2 à partir duquel $\frac{u_n}{v_n} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ c'est-à-dire $\frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n$.

On a donc, pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$,

$$0 \leq \frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n.$$

En sommant dans $[0, +\infty]$ sans se soucier de convergence car les termes sont positifs, on en déduit

$$\frac{1}{2} \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} v_n \leq 2 \sum_{n=N}^{+\infty} u_n.$$

On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$, donc $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}}$

2. On étudie la convergence absolue.

$$\left| \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{\sqrt{n+3} - 1} \right| = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{\sqrt{n+3} - 1}$$

Or $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, et $n+3 \sim n$ donc $\sqrt{n+3} \sim \sqrt{n}$ puis

$$\sqrt{n+3} - 1 = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + o(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}.$$

Finalement,

$$0 \leq \left| \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{\sqrt{n+3} - 1} \right| \sim \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{3/2}}.$$

Or, par croissances comparées, $\frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{3/2}} = o\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$, donc par comparaison de séries à termes positifs et par nature de série de Riemann avec $\frac{5}{4} > 1$, $\sum \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{3/2}}$ converge, donc, avec la question précédente,

$\boxed{\sum \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{\sqrt{n+3} - 1} \text{ converge absolument, donc elle converge}} \text{ (car } \mathbb{C} \text{ est un espace vectoriel de dimension finie).}$

Exercice 8 : Analyse – Convergence de séries alternées

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

1. (a) On montre que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \rightarrow 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$$

par décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ croît.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

par décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite.

Un théorème du cours nous permet alors de conclure que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers cette limite commune).

Ainsi, $\boxed{\sum (-1)^n u_n \text{ converge.}}$

(b) Le théorème spécial sur des séries alternées nous dit qu'en outre,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |(-1)^{n+1} u_{n+1}| = u_{n+1}.}$$

2. (a) ■ Si $x < 0$, alors $|f_n(x)| = \frac{e^{n(-x)}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées, donc $f_n(x) \not\rightarrow 0$: $\sum f_n(x)$ diverge (grossièrement).

- Si $x \geq 0$, alors $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{e^{-nx}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(e^{-nx} \times \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante en tant que produit de suites décroissantes positives, et tend vers 0.

Le théorème spécial s'applique et donne la convergence de $\sum f_n(x)$.

Donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+}.$

(b) En utilisant la majoration du reste, on obtient, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$|R_n(x)| \leq u_{n+1}(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

avec $\frac{1}{n+1}$ indépendant de x et $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

Ainsi, (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n \geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}^+}.$$

**Exercice 9 : Analyse – Convergence uniforme de séries de fonctions**

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
 - (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
 - (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

1. **Première définition** (g_n) converge uniformément vers g sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Deuxième définition (g_n) converge uniformément vers g sur X si et seulement si, à partir d'un certain rang $g_n - g$ est bornée sur X et

$$N_{\infty, X}(g_n - g) = \sup_{x \in X} |g_n(x) - g(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $\frac{n+2}{n+1} \rightarrow 1$, $(\cos(\sqrt{n}x))_n$ est bornée et $e^{-nx^2} \rightarrow 0$, donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Puis } f_n(0) = \frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Finalement, } (f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers } f : x \mapsto \delta_{x,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (b) Comme toutes les f_n sont continues en 0 mais pas f , la convergence ne saurait être uniforme sur $[0, +\infty[$ par contraposée du théorème de continuité des limites de suites de fonctions.
- (c) Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x) \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$$

qui ne dépend pas de x , donc $f_n - f$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et

$$N_{\infty, [a, +\infty[}(f_n - f) \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

- (d) On montre que (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Pour cela, on exhibe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ au voisinage de 0 pour laquelle $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$.

Posons $x_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} > 0$. Alors

$$f_n(x_n) - f(x_n) = f_n(x_n) = \frac{n+2}{n+1} e^{-4\pi^2} \cos 2\pi \rightarrow e^{-4\pi^2} \neq 0$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 10 : Analyse – Limite d'intégrale sur un segment par convergence uniforme

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

1. Pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^x$: la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ sur $[0, 1]$. On a

$$\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| = \left| (x^2 + 1) \frac{x(e^{-x} - e^x)}{n+x} \right| \leq \frac{2e}{n} \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

donc $N_\infty(f_n - f) \leq \frac{2e}{n} \rightarrow 0$ puis $N_\infty(f_n - f) \rightarrow 0$ et donc

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2. **H1** Toutes les f_n sont continues sur $[0, 1]$;

H2 (f_n) converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

On peut intervertir limite et intégrale :

$$\int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx.$$

En effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = 2e - 3$.

**Exercice 11 : Analyse – Preuve de non convergence uniforme**

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f .

On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

1. Par contraposée, si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur X et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, alors à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est bornée et

$$\forall n \geq N, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq N_{\infty, X}(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0 \Rightarrow (f_n)$ ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$.

(a) On a $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et si $x \in \mathbb{R}^*$, $(\sin(nx))_n$ bornée et $\frac{1}{1 + n^2 x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement, (f_n) converge simplement vers f la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \quad \text{qui ne dépend pas de } x$$

donc $f_n - f$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et

$$N_{\infty, [a, +\infty[}(f_n - f) \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Par contre, il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. Utilisons la question 1 pour le justifier, en exhibant une suite $(x_n)_n$ au voisinage de 0 telle que $f_n(x_n) - f(x_n) = f_n(x_n) \not\rightarrow 0$.

il suffit de poser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\pi}{2n}$. On a bien, dans ce cas, $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \not\rightarrow 0$.

Exercice 12 : Analyse – Transfert de continuité par convergence uniforme

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$.

Démontrer que f est continue en x_0 .

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$.

La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

1. Pas de miracle, ici, il faut sortir les ε . Soit $\varepsilon > 0$, donc.

Comme (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f , il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $x \in [a, b]$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f_N(x) - f_N(x_0)| + 2\frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Or f_N est continue en x_0 , donc $f_N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f_N(x_0)$.

On a donc $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \eta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On a finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

soit $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, c'est-à-dire f continue en x_0 .

2. On a $g_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $g_n(1) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et si $x \in [0, 1[, g_n(x) = e^{n \ln x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite $(g_n)_n$ de fonctions continues sur $[0, 1]$ converge donc simplement vers la fonction $g : x \mapsto \delta_{x,1}$ discontinue en 1.

Vu la question précédente, la convergence ne saurait être uniforme.

**Exercice 13 : Analyse – Compacité**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$.

(a) Justifier que $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E .

(b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.

$S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

1. Une partie K de E est compacte si toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence dans K .
2. Soit K compacte et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $x \in E$. Par compacité, $(x_n)_n$ possède au moins une valeur d'adhérence dans K . Or, par extraction, cette valeur d'adhérence vaut nécessairement x , qui est donc dans K .

Par caractérisation séquentielle, K est fermée.

3. Supposons que K ne soit pas bornée.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| \geq n$ (car $K \not\subset B(0_E, n)$).

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ a une valeur d'adhérence dans K alors que $(\|x_n\|)_n$ ne peut en avoir : c'est contradictoire.

C'est donc que K est bornée.

4. (a) $S(0, 1)$ est une partie fermée en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $\|\cdot\|_1$ (elle est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire) et bornée car par définition, pour tout $P \in S(0, 1)$, $\|P\|_1 = 1$.

- (b) Si $n \neq m$, $\|X^n - X^m\|_1 = 2$.

Supposons que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(0, 1)^{\mathbb{N}}$ ait une valeur d'adhérence : on a $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(X^{\varphi(n)})_n$ converge pour $\|\cdot\|_1$. Mais alors $X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} 0_E$.

Or $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ donc $\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\|_1 = 2 \not\rightarrow 0$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, $S(0, 1)$ n'est pas une partie compacte de E .

Exercice 14 : Analyse – Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

1. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Prouver que la suite $\left(\int_a^b f_n(x) \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) \, dx$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$.

Prouver, en utilisant 1., que $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

1. $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang, et à partir de ce rang, on peut écrire

$$\left| \int_a^b f_n(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| \, dt \leq (b-a)N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $\boxed{\int_a^b f_n(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.}$

2. Il suffit d'appliquer le théorème redémontré dans la première question à la suite des sommes partielles

$$(S_n) = \left(\sum_{k=0}^n f_k \right) :$$

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est continue sur $[a, b]$ car les f_k le sont.

H2 (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ par définition de la convergence uniforme de $\sum f_n$.

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) \, dx = \int_a^b S_n(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \, dx$$

soit $\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.}$

3. En utilisant le théorème remontré dans la question précédente :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

H2 La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ car, avec $f_n : x \mapsto x^n$,

$N_\infty(f_n) = \frac{1}{2^n}$ qui est un terme général de série géométrique convergente.

On en déduit alors que

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}}.$$

Or

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} = \left[-\ln|1-x| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln 2$$

donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2.}$

**Exercice 15 : Analyse – Convergences uniforme et normale d'une série de fonctions**

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

1. On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X lorsque les f_n sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X lorsque la suite des sommes partielles $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^n f_k \right)$ converge uniformément, ce qui équivaut à la convergence uniforme de suite $(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right)$ vers la fonction nulle.

2. En cas de convergence normale, on a, au moins à partir d'un certain rang, pour tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq N_\infty(f_n)$ donc convergence absolue de $\sum f_n(x)$ et donc convergence simple de $\sum f_n$ sur X . On peut donc bien parler de reste.

Puis, par inégalité triangulaire, pour tout $x \in X$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} N_\infty(f_k),$$

le dernier terme ne dépendant pas de x et tendant vers 0 comme reste de série convergente, donc $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 et donc $\sum f_n$ converge uniformément sur X .

3. On a d'après le cours $R\left(\sum \frac{n^2}{n!} z^n\right) = R\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$ en reconnaissant la série exponentielle.

Cette série entière converge donc normalement sur tout disque fermé de $\mathbb{C}$. En particulier, d'après 2.,

cette série entière converge uniformément sur tout disque de centre 0 et de rayon R .

Exercice 16 : Analyse – Équivalent de H_n et classe $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions de terme général f_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right].$$

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

1. On a, pour tout $x \in]0, 1]$, $-f_n(x) \sim \frac{x^2}{2n^2}$ terme général positif de série convergente, donc, par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge. C'est aussi le cas pour $x = 0$ car $f_n(0) = 0$. Donc S est bien définie sur $[0, 1]$.

2. Comme

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n},$$

u_n est la somme partielle d'ordre n de la série précédente pour $x = 1$, donc $u_n \rightarrow S(1)$.

Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - u_n = \ln n + o(\ln n)$ et donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

3. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$

H2 D'après la question 1, $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

H3 $\forall x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que $N_\infty(f'_n) \leq \frac{1}{n^2}$ qui est un terme général positif de série convergente.

Donc $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on a $\forall x \in [0, 1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$.

En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1$ par télescopage. Donc $S'(1) = -1$.

**Exercice 17 : Analyse - Convergence uniforme de série de fonctions**

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A

$\Downarrow$

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

1. Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers f .

Notons S_n et R_n les fonctions somme partielle et reste d'ordre n respectivement.

Alors, à partir d'un certain rang, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est bornée sur A et $N_\infty(R_n) = N_\infty(f - S_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $f_n = R_{n-1} - R_n$ est bornée sur A à partir d'un certain rang et $|f_n| = |R_{n-1} - R_n| \leq |R_{n-1}| + |R_n|$ donc

$$N_\infty(f_n) \leq N_\infty(R_{n-1}) + N_\infty(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A .

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées.

Par critère de Riemann, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum f_n(x)$ converge. Bref,

$$\sum f_n \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[.$$

Mais la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

En effet, $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1} \not\rightarrow 0$.

La contraposée de propriété redémontrée en question 1 permet de conclure que

$$\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0, +\infty[.$$

Exercice 18 : Analyse - Continuité et modes de convergence d'une série entière

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?

(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .

(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

En $x = 1$, il y a convergence par le théorème spécial des séries alternées.

En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).

On a donc $D =]-1, 1[$.

2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $] -1, 1[$.

En $x = 1$, il s'agit de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, dont la convergence est assurée par le théorème spécial des séries alternées.

Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de S en 1, et donc finalement S est continue sur D entier.

(b) $\forall x \in D, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$, donc $N_\infty(u_n) = \sup_{x \in]-1, 1[} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$ (atteint en $x = 1$) et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas normalement sur D .

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, ce qui est absurde.

(c) On étudie la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées :

$\left(\frac{x^n}{n}\right)$ décroît et tend vers 0. Cela permet de majorer son reste R_n . On a

$$\forall x \in [0, 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

Donc $N_\infty(R_n) \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Donc, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Bilan final : En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $] -1, 1[$ et converge uniformément sur tout segment de $] -1, 1]$.

Remarque : On aurait aussi pu reconnaître dès le départ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto -\ln(1+x)$ mais ce n'est sans doute pas l'idée du concepteur de l'exercice.

**Exercice 19 : Analyse – DSE par dérivation terme à terme et par produit de Cauchy**

1. (a) Justifier à l'aide du théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.

Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

- (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

- (b) Rappeler les résultats sur le produit de Cauchy de deux séries entières.

- (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe

$$z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}.$$

1. (a) On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions :

H1 les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$;

H2 la série de fonction converge simplement sur $] -R, R[$;

H3 la série des f'_n qui a même rayon de convergence converge uniformément sur tout segment de $] -R, R[$.

(b) Et donc, en dérivant $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$.

2. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

- (b) Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de rayon R_a et R_b respectivement, alors la série des $\sum \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ est de rayon $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| < R_c$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

- (c) En effectuant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

Exercice 20 : Analyse – Rayon de convergence d'une série entière

- Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
- Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

(a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}.$

(b) $\sum n^{(-1)^n} z^n.$

(c) $\sum \cos(n) z^n.$

- Donner les deux définitions :

- Celle du programme : $R = \sup \left(\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\} \right) \in [0, +\infty]$
- Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique $R \in [0, +\infty]$ tel que

$$|z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

- (a) Comme la série entière est lacunaire, on utilise le critère de d'Alembert général : pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{(n+1)!^2 |z|^{2n+3} (2n)!}{(2n+2)! n!^2 |z|^{2n+1}} \rightarrow \frac{|z|^2}{4},$$

donc la série entière converge absolument si $|z| < 2$ et diverge grossièrement si $|z| > 2$: $\boxed{R = 2.}$

- (b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n$$

et comme les séries entières $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum n z^n$ ont un rayon de convergence égal à celui de $\sum z^n$ donc 1, c'est aussi le cas de $\sum n^{(-1)^n} z^n$: $\boxed{R = 1.}$

- (c) La suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers 0 (sinon, on a un problème avec $\cos(2n) = 2 \cos^2 n - 1 \dots$) donc la série $\sum \cos(n) 1^n$ ne converge pas absolument, donc $\boxed{R = 1.}$

Remarque : Cette fois, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.

**Exercice 21 : Analyse – Rayon de convergence d'une série entière**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) z^n$?

1. Donner les deux définitions :

- Celle du programme : $R = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée} \} \in [0, +\infty]$
- Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique $R \in [0, +\infty]$ tel que

$$|z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. Comme $\sum a_n 1^n$ et $(a_n 1^n)$ est bornée, 1 est sur le cercle de convergence : $\boxed{R = 1.}$

3. Pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$

par l'inégalité de convexité classique sur le $\ln$ (au programme de première année) donc (a_n) est bornée. De plus,

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{terme général positif de série divergente}$$

donc $\sum a_n$ diverge par comparaison.

Autre argument possible : $a_{2n} = \sqrt{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \rightarrow 1$ donc $a_n \not\rightarrow 0$: la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Donc $\boxed{R = 1.}$

Exercice 22 : Analyse – Rayon de convergence et continuité d'une somme de séries entières

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?
En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$.

Alors $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

En effet, Si $|z| \leq \min(R_a, R_b)$, on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.

Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$, z tel que $R_a < |z| < R_b$, alors $a_n z^n \not\rightarrow 0$ et $b_n z^n \rightarrow 0$ donc $(a_n + b_n) z^n \not\rightarrow 0$ et $|z| \geq R_{a+b}$ puis $R_a \geq R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b) = R_a$.

2. Pour $|x| < 1$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Pour $|x| < \frac{1}{2}$, $\ln(1-2x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

D'après 1., le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ vaut $\frac{1}{2}$.

Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et est

contenu dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et, $\text{pour } |x| < \frac{1}{2}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$.

Pour $x = \frac{1}{4}$: la série entière converge et est continue en $\frac{1}{4}$ car $\frac{1}{4} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Pour $x = \frac{1}{2}$: la série entière diverge car elle est la somme d'une série convergente : $\frac{1}{2}$ appartient à $] -1, 1[$, intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, et d'une série divergente : la série harmonique.

Pour $x = -\frac{1}{2}$: la série entière converge en $-\frac{1}{2}$ comme somme de deux séries convergentes. En effet,

- d'une part, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$;
- d'autre part, $\sum_{n \geq 1} -\frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien décroissante et de limite nulle.

La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée par le théorème d'Abel radial appliqué à $x \mapsto f(-x)$.

Remarque : Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon $R > 0$. On note f la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

La version du théorème d'Abel radial au programme assure que

$$\text{si } \sum a_n R^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

En considérant la fonction $x \mapsto f(-x)$ qui est la somme de la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$ (de rayon de convergence toujours égal à R), on a immédiatement l'extension suivante

$$\text{si } \sum a_n (-R)^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow -R^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n.$$

**Exercice 23 : Analyse – Classe $\mathcal{C}^1$ d'une série entière**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
On le note R .

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $] -R, R[$.

1. On pose ℓ la limite de la suite convergente $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Alors, d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières, $R\left(\sum a_n x^n\right) = R = \frac{1}{\ell}$ (avec $R = +\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$).

Puis, comme $\frac{|(n+1)a_{n+1}|}{|na_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc $R\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right) = \frac{1}{\ell} = R = R\left(\sum a_n x^n\right)$.

2. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, f_n(x) = a_n x^n$.

Soit $r \in [0, R[$. On pose $D_r = [-r, r]$.

On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions :

H1 $\sum f_n$ converge simplement sur D_r .

H2 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_r .

H3 D'après 1., $\sum f'_n$ est une série entière de rayon de convergence R .

Donc, $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans $] -R, R[$, donc converge uniformément sur D_r .

On en déduit que $\forall r \in [0, R[, S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_r . Donc,

S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$.

Exercice 24 : Analyse – Série entière et classe $\mathcal{C}^\infty$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
(b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos \sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Par critère de d'Alembert, comme $\left| \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow 0$,

la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ de rayon de convergence $+\infty$.

3. (a) Pour $x \geq 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(t)$ donc $S(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t)$ donc $S(x) = \cos \sqrt{-x}$.

- (b) D'après la question précédente, $f = S$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.

**Exercice 25 : Analyse – Convergence dominée**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^ne^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n) .

1. $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}} \leq \frac{1}{1+t^2}$ avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

donc $\int \frac{dt}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ converge et ainsi, par positivité, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Autre rédaction possible : dans $[0, +\infty[$,

$$0 \leq \int \frac{dt}{1+t^2+t^ne^{-t}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

d'où la convergence de l'intégrale puis l'intégrabilité par positivité.

2. On utilise le théorème de convergence dominée :

H1 La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

H2 Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.

H3 $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \phi(t)$ avec ϕ positive, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}.$

Exercice 26 : Analyse – Suite d'intégrales et série alternée

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$. Or $2n > 1$, donc $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par critère de Riemann. Donc, par équivalence, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

2. (a) $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_{n+1}(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} = f_n(t)$ car $1+t^2 \geq 1$.

En intégrant, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} \leq I_n.$$

Donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- (b) Remarque : $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

H1 La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(On peut aussi appliquer le théorème sur $]0, +\infty[$ pour ne pas avoir à traiter le cas particulier de $x = 0$.)

H2 Les f_n et f sont continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

H3 Domination

$$\forall t \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \phi(t)$$

avec ϕ continue et positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |\phi(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty,$$

donc ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On obtient alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

et la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a pour limite 0.

3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer que

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n \text{ converge.}$$

**Exercice 27 : Analyse – Convergence uniforme et convergence dominée**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. On a déjà $f_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Soit $x \in]0, 1]$. Pour n au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^2} \frac{1}{n^2}$, donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit $a \in]0, 1[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 1], |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}$$

Comme cette majoration est indépendante de x , $\|f_n - f\|_{\infty, [a, 1]} \leq \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}$.

Or $\frac{e^{-a}}{1+n^2a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $N_{\infty, [a, 1]}(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.

3. Les fonctions f_n étant continues sur $[0, 1]$ et la limite simple f ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.

4. On utilise le théorème de convergence dominée.

H1 (f_n) converge simplement vers f sur $[0, 1]$.

H2 Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0, 1]$.

H3 Domination $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x} \leq 1 = \varphi(x)$ avec $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, positive, intégrable sur $[0, 1]$.

On en conclut donc que

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Exercice 28 : Analyse – Intégrabilités**N.B. : les deux questions sont indépendantes.****1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?****2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?**1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ continue sur $]2, +\infty[$. De plus,**Sur** $]2, 3]$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{e^{-2}}{2} \times \frac{1}{(x-2)^{1/2}}.$$

Or $x \mapsto \frac{1}{(x-2)^{1/2}}$ est intégrable sur $]2, 3]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]2, 3]$ car $\frac{1}{2} < 1$).Donc, par comparaison, f est intégrable sur $]2, 3]$.**Sur** $[3, +\infty[$

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} = g(x).$$

Or $x^2 g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées donc, au voisinage de $+\infty$, $g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[3, +\infty[$, on en déduit que g est intégrable sur $[3, +\infty[$.Donc, par comparaison, f est intégrable sur $[3, +\infty[$.Ainsi, f est intégrable sur $]2, +\infty[$.**2. Cas particulier d'intégrales de Bertrand** : soit a un réel strictement positif. On pose $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^{2a}}}$, fonction continue sur $]0, +\infty[$.**Sur** $]0, e]$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x = g(x).$$

Or $\sqrt{x}g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc, au voisinage de 0, $g(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$.Or $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]0, 1]$ car $1/2 < 1$).Donc g est intégrable sur $]0, e]$, et, par comparaison, f est intégrable sur $]0, e]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.**Sur** $[e, +\infty[$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^a} = h(x).$$

si $a > 1$, prenons γ tel que $1 < \gamma < a$.

$$x^\gamma h(x) = x^{\gamma-a} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc, au voisinage de $+\infty$, $h(x) = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$.Or $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ est intégrable sur $[e, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable sur $[e, +\infty[$ car $\gamma > 1$), donc h est intégrable sur $[e, +\infty[$.Ainsi, par comparaison, f est intégrable sur $[e, +\infty[$.**si** $a \leq 1$,

$$\forall x \in [e, +\infty[, h(x) \geq \frac{1}{x^a} \geq 0$$

(C'est la raison pour laquelle on a coupé l'intervalle en e .)Or $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ non intégrable sur $[e, +\infty[$ (fonction de Riemann avec $a \leq 1$), donc, par comparaison de fonctions positives, h n'est pas intégrable sur $[e, +\infty[$.Ainsi, par équivalence, f n'est pas intégrable sur $[e, +\infty[$.Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

**Exercice 29 : Analyse – Fonction Γ**

On pose $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[,$ positive.

- Intégrabilité sur $[1, +\infty[$: par croissances comparées, $e^{-t}t^{x-1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann.
- Intégrabilité sur $]0, 1]$: $e^{-t}t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $1-x < 1$.

Donc Γ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

2. Par intégration par parties, si $0 < \varepsilon < A$,

$$\int_{\varepsilon}^A e^{-t}t^{x-1} dt = \left[e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^A e^{-t}t^x dt$$

Mais, par croissances comparées,

$$e^{-A} \frac{A^x}{x} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

et de plus

$$e^{-\varepsilon} \frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

On en déduit, en prenant les limites quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $A \rightarrow +\infty$,

$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

C'est-à-dire $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres.

H1 Pour tout $t \in]0, +\infty[, x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par opérations avec

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, t) \mapsto \ln(t)f(x, t).$$

H2 Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par 1.

H3 Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

H4 Domination : Soit $K = [a, b]$ avec $0 < a < b$. On a

$$\forall (x, t) \in K \times]0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t) = \begin{cases} |\ln t| e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ |\ln t| e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

avec ϕ positive, continue par morceaux sur $]0, +\infty[,$ intégrable sur $]0, 1]$ car $\phi(t) = \underset{t \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right)$ avec

$1-a < \alpha < 1$ et sur $[1, +\infty[,$ car $\phi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

On a donc $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+)$ et $\Gamma' : (x, t) \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(t)f(x, t) dt$.

Exercice 30 : Analyse – Dérivation des intégrales à paramètre

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Pour gagner du temps, il est conseillé de traiter les deux premières questions simultanément !

1. et 2. Soit I et J des intervalles réels et $g : \begin{cases} J \times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \longmapsto f(x, t) \end{cases}$.

Ici : $J = \mathbb{R}$, $I = [0, +\infty[$ et $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

On suppose

H1 $\forall t \in I, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J , de dérivée $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$.

C'est bien le cas ici, avec $\frac{\partial g}{\partial x} : (x, t) \mapsto -te^{-t^2} \sin(xt)$.

H2 $\forall x \in J, t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I .

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ par croissances comparées donc, $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$.

H3 $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ continue par morceaux sur I .

C'est bien le cas ici.

Domination globale ou sur tout segment de $\frac{\partial g}{\partial x}$

H4 Éventuellement sur tout segment S , il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J \text{ ou } S, \forall t \in I, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t).$$

On procède ici à une domination globale : $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \phi(t)$ avec ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet, par croissances comparées, $\phi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. Par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, ϕ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors

C1 $f : x \mapsto \int_I g(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .

C2 $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I et $f'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$.

3. (a) On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$. Procédons à une intégration par parties. Soit $A \geq 0$.

$$\int_0^A -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

En passant à la limite quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient $f'(x) + \frac{x}{2} f(x) = 0$.

Donc f est solution de l'équation différentielle $(L) : y' + \frac{x}{2} y = 0$.

(b) Les solutions de (L) sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{4}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

**Exercice 31 : Analyse – Méthode de variation des constantes****1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.****2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.**

1. Le calcul de primitive se fait par linéarisation.

Deux méthodes : soit en utilisant des formules de trigonométries, soit en utilisant les formules d'Euler et du binôme de Newton.

Dans le premier cas, on écrit

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{\cos(2x) + 1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \cos^2(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\cos(4x) + 1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

et dans le deuxième cas,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{ix}e^{-ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) + 4\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Alors $x \mapsto \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x$ une primitive de $\cos^4$.2. On a un système fondamental bien connu de solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$: $(\cos, \sin)$.Par méthode de variation des constantes, on cherche une solution particulière de l'équation $y'' + y = \cos^3$ sous la forme $f_0 : x \mapsto \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$ avec λ, μ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lambda' \begin{pmatrix} \cos \\ \cos' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} \sin \\ \sin' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \cos \times \lambda' + \sin \times \mu' = 0 & (1) \\ -\sin \times \lambda' + \cos \times \mu' = \cos^3 & (2) \end{cases}$$

Alors, soit en reconnaissant une matrice de rotation $R(-x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ d'inverse $R(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, soit à l'aide des opérations $\cos \times (1) - \sin \times (2)$ et $\sin \times (1) + \cos \times (2)$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' = -\sin \times \cos^3 \\ \mu' = \cos^4 \end{cases}$$

On peut donc choisir $\lambda : x \mapsto \frac{\cos^4 x}{4}$ et $\mu : x \mapsto \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x$.Alors $f_0 : x \mapsto \frac{\cos^5 x}{4} + \left(\frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x \right) \sin x$ est solution particulière et les solutions de $y'' + y = \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$f_0 + A \cos + B \sin \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque : on peut aussi résoudre l'équation sans variation des constantes avec le programme de première année en linéarisant le second membre $\cos^3$ et en utilisant le principe de superposition.

Exercice 32 : Analyse – Solution DSE d’une EDL₂

Soit l’équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d’une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

1. **Analyse** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$$

Donc

$$x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}) x^n.$$

Par unicité des coefficients d’un développement en série entière, la fonction S est solution sur $] -R, R[$ de l’équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0.$$

C’est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1)a_n$, ce qui revient à

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1.$$

Synthèse Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l’équation sont les fonctions

$$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$$

définies sur $] -1, 1[$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$, et même sur $\mathbb{R}$ si $a_1 = 0$.

2. Notons (L) l’équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Prouvons que les solutions de (L) sur $]0, 1[$ ne sont pas toutes développables en série entière sur $] -1, 1[$.

En effet, si toutes les solutions de (L) sur $]0, 1[$ étaient développables en série entière à l’origine alors, d’après 1., l’ensemble des solutions de (L) sur $]0, 1[$ serait égal à la droite vectorielle $\text{Vect}(f)$ où $f : x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$.

Or, comme les fonctions $x \mapsto x(x-1)$, $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $]0, 1[$ et comme la fonction $x \mapsto x(x-1)$ ne s’annule pas sur $]0, 1[$, l’ensemble des solutions de (L) sur $]0, 1[$ est un plan vectoriel, ce qui est contradictoire.

**Exercice 33 : Analyse – Classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de deux variables**

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.

Pour la continuité en $(0, 0)$, on peut utiliser la célèbre inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (car $(|x| - |y|)^2 \geq 0$)

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = f(0, 0)$$

On peut aussi utiliser les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, alors

$$|f(x, y)| = |r^{3/2} \cos \theta \sin \theta| \leq r^{3/2} \rightarrow 0$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$.

Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.

2. f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ par opérations.

L'application partielle $f_x : x \mapsto f(x, 0)$ vaut 0 si $x \neq 0$ et si $x = 0$. C'est donc l'application nulle. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Par symétrie, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.

Analysons la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$. On calcule, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \frac{\text{sgn}(x)}{2\sqrt{2}} \not\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$ et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34 : Analyse – Autour de l'adhérence

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $x_n \rightarrow x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soit B une autre partie non vide de E . Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

1. Un point adhérent à A est un point x tel que toute boule ouverte centrée en x rencontre A :

$$x \in E \quad \text{et} \quad \forall r > 0, \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

2. ($\implies$) On suppose que x est adhérent à A .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $r = \frac{1}{n+1}$, on a $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$ donc tel que $d(x_n, x) = \|x_n - x\| \leq \frac{1}{n+1}$.

Cela définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$.

- ($\impliedby$) Si on a une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$, alors pour tout $r > 0$, on a un rang à partir duquel $x_n \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{A}$.

3. ■ $\overline{A}$ est une partie non vide de E puisqu'elle contient A entier.
 ■ Si $x, y \in \overline{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par la caractérisation séquentielle (question 2, sens direct), on a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$.
 Alors $(x_n + \lambda y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ (car A est un sous-espace vectoriel de E) est une suite telle que $x_n + \lambda y_n \rightarrow x + \lambda y$.
 Donc, par la question 2 (sens réciproque), $x + \lambda y \in \overline{A}$.

Par caractérisation, $\overline{A}$ est encore un sous-espace vectoriel de E .

4. Toujours avec la caractérisation séquentielle, en considérant la norme produit,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \overline{A \times B} &\iff \exists ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}}, \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \\ &\iff \exists ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}}, \quad x_n \rightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow y \\ &\iff \begin{cases} \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \rightarrow x \\ \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}, \quad y_n \rightarrow y \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}. \end{aligned}$$

donc $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

**Exercice 35 : Analyse – Caractérisation séquentielle de la continuité et densité**

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E .

On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a .

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Prouver que les propositions **P1** et **P2** sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E , et soient f et g deux applications continues de E dans F .

Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

1. ■ Supposons **P1** : f continue en a .

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que $\|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow a$. On a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\|x_n - a\|_E \leq \eta$.

Mais alors, si $n \geq N$, $\|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

C'est donc bien que $f(x_n) \rightarrow f(a)$, donc **P2** est vraie.

- Montrons que **P2** $\implies$ **P1** par contraposée. Supposons **P1** fausse : f n'est pas continue en a .

On a donc $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x \in E, \begin{cases} \|x - a\|_E \leq \eta \\ \|f(x) - f(a)\|_F > \varepsilon \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\eta = \frac{1}{2^n}$, on a $x_n \in E$ tel que $\begin{cases} \|x_n - a\|_E \leq \frac{1}{2^n} \\ \|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon \end{cases}$

Cela définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \rightarrow a$ et $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ donc **P2** est fausse.

2. Par caractérisation séquentielle de la densité de A dans E , si $x \in E$, on a une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow x$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = g(a_n)$.

Par continuité, en passant à la limite, on obtient $f(x) = g(x)$.

Ainsi, $f = g$.

Exercice 36 : Analyse – Continuité des applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E .

P2. f est continue en 0_E .

P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

1. P1 $\Rightarrow$ P2 est immédiat.

P2 $\Rightarrow$ P3 Supposons f est continue en 0_E et remarquons que le résultat à montrer s'écrit, pour $x \neq 0_E$,

$$\left\| f\left(\frac{x}{k\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq 1, \text{ avec } \left\| \frac{x}{k\|x\|_E} \right\|_E = \frac{1}{k}.$$

Écrivons alors la définition de la continuité en 0_E avec $\varepsilon = 1$: on a $\eta > 0$ tel que si $\|x\|_E \leq \eta$, $\|f(x)\|_F \leq 1$ (car $f(0_E) = 0_E$).

La remarque précédente nous incite à choisir k tel que $\frac{1}{k} \leq \eta$. Poser $k = \frac{1}{\eta}$.

Alors, si $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\left\| \frac{x}{k\|x\|_E} \right\|_E = \frac{1}{k} = \eta$, donc $\left\| f\left(\frac{x}{k\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq 1$ ce qui donne bien $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

Comme cette inégalité est également vérifiée en 0_E , $k = \frac{1}{\eta}$ convient.

P3 $\Rightarrow$ P1 S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$, alors

$$\forall x, x' \in E, \|f(x) - f(x')\|_F = \|f(x - x')\|_F \leq k \|x - x'\|_E$$

donc f est k -lipschitzienne, donc continue (et même uniformément) sur E .

2. La linéarité de φ provient de celle de l'intégrale, en général.

Pour toute $f \in E$, les bornes de l'intégrale étant bien ordonnées,

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = 1 \times \|f\|_\infty.$$

Donc φ est linéaire et continue sur E .

**Exercice 37 : Analyse – Comparaison de normes**

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall f \in E, N_{\infty}(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. (a) Démontrer que N_{∞} et N_1 sont deux normes sur E .
 (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_{\infty}(f)$.
 (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_{∞} .
2. Démontrer que les normes N_1 et N_{∞} ne sont pas équivalentes.

1. (a) **Bonne définition** Une fonction continue sur un segment étant bornée et admettant bien une intégrale, N_{∞} et N_1 sont bien définies sur E à valeurs réelles (et positives, ce qui est aussi une conséquence des propriétés suivantes).

Séparation Soit $f \in E$.

- Si $N_{\infty}(f) = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| = 0$ donc $f = 0_E$.
- Si $N_1(f) = 0$, alors, comme $|f|$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| = 0$ donc $f = 0_E$.

Homogénéité Si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- Comme $|\lambda| \geq 0$, $N_{\infty}(\lambda f) = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} (|\lambda| \cdot |f(x)|) = |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = |\lambda| N_{\infty}(f)$.
- $N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = \int_0^1 |\lambda| \cdot |f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| N_1(f)$ par linéarité de l'intégrale.

Inégalité triangulaire Si $f, g \in E$, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ donc

- $|f(x) + g(x)| \leq N_{\infty}(f) + N_{\infty}(g)$ qui ne dépend pas de x donc $N_{\infty}(f + g) \leq N_{\infty}(f) + N_{\infty}(g)$.
- Par croissance et linéarité de l'intégrale,

$$N_1(f + g) = \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt = \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = N_1(f) + N_1(g).$$

N_{∞} et N_1 sont donc bien des normes sur E .

- (b) Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq N_{\infty}(f)$ donc par croissance de l'intégrale,

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 N_{\infty}(f) dt = N_{\infty}(f).$$

donc $N_1(f) \leq 1 \cdot N_{\infty}(f)$.

- (c) **Première méthode** Si $\mathcal{O}$ ouvert de E pour la norme N_1 et $f \in \mathcal{O}$, alors on a $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_1(f, r)$ pour N_1 est incluse dans $\mathcal{O}$. Alors, si $N_{\infty}(g - f) \leq r$, vu la question précédente, $N_1(g - f) \leq r$ donc $g \in B_1(f, r) \subset \mathcal{O}$.

On a donc $r > 0$ tel que $B_{\infty}(f, r) \subset E$ (boule ouverte pour N_{∞}) : $\mathcal{O}$ est ouvert pour N_{∞} .

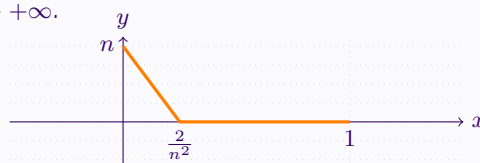
Deuxième méthode la question précédente nous dit que l'application linéaire $\text{id}_E : (E, N_{\infty}) \rightarrow (E, N_1)$ est continue.

Alors, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E pour N_1 , $\mathcal{O} = \text{id}_E^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert pour N_{∞} .

2. Pour montrer que les normes N_1 et N_{∞} ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\left(\frac{N_{\infty}(f_n)}{N_1(f_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

- $f_n : x \mapsto x^n$ convient car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_{\infty}(f_n) = 1$ et $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ donc $\frac{N_{\infty}(f_n)}{N_1(f_n)} = n+1 \rightarrow +\infty$.
- On peut aussi, de façon moins miraculeuse, chercher une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $(N_1(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et non $(N_{\infty}(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Cela peut se construire manuellement est imposant la norme infinie à valoir n tandis que l'aire sous la courbe vaut $\frac{1}{n}$ par exemple. Il suffit que f_n soit affine de $(0, n)$ à $(\frac{2}{n^2}, 0)$ et nulle ensuite (l'intégrale de f_n est l'aire d'un triangle rectangle valant $\frac{1}{n}$).

Alors, si $n \geq 1$, $\frac{N_{\infty}(f_n)}{N_1(f_n)} = n^2 \rightarrow +\infty$.



Exercice 38 : Analyse – Continuité d'applications linéaires et normes subordonnées

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n -uplet non nul, fixé.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \text{Soit } u : & & \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$$

(a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_2$ où

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Calculer $\|u\|$.

2. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \text{Soit } u : & & \text{avec} \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$$

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On admet que u est un endomorphisme de E .

Prouver que u est continue et calculer $\|u\|$.

Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$.

Remarque : Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. (a) ■ L'application u est linéaire sur $\mathbb{R}^n$;
 ■ l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie ;
 ■ les normes sont toutes équivalentes sur un espace de dimension finie ;
 ■ les applications linéaires définies sur un espace de dimension finie sont automatiquement continues ;

donc u est continue pour toute norme de $\mathbb{R}^n$.

- (b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, en notant $a = (a_1, \dots, a_n)$ et en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

$$|u(x)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right| = |(a|x)| \leq \|a\|_2 \|x\|_2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz, avec égalité si x et a sont colinéaires. On a donc

$$\|u\| = \|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

2. Soit $f \in E$.

$$\|u(f)\|_1 = \int_0^1 |g(x)| dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x \underbrace{|f(t)|}_{\geq 0} dt \right) dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{|f(t)|}_{\geq 0} dt \right) dx = \int_0^1 \|f\|_1 dx = \|f\|_1$$

donc u est continue, $\|u\|$ existe et $\|u\| \leq 1$.

Considérons comme proposé, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$, qui a la bonne vertu de concentrer son intégrale au voisinage de 0.

Alors pour tout $x \in [0, 1]$, $u(f_n)(x) = g_n(x) = \int_0^x ne^{-nt} dt = [-e^{-nt}]_0^x = 1 - e^{-nx}$. Donc

$$\|u(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nx}) dt = 1 + \left[\frac{e^{-nt}}{n} \right]_0^1 = 1 + \frac{e^{-n} - 1}{n}.$$

$$\text{Or } \|f_n\|_1 = \int_0^1 ne^{-nt} dt = 1 - e^{-n}, \text{ donc } \frac{\|u(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{1 + \frac{e^{-n} - 1}{n}}{1 - e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\|u\| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|u(f)\|_1}{\|f\|_1} = 1.$

**Exercice 39 : Analyse – Espace ℓ^2 et biorthogonal en dimension infinie**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

$$\text{On pose alors } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

- (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 .

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.

Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$). Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

1. (a) Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2} (x_n^2 + y_n^2)$ qui est un terme général positif de série convergente.

Donc, par comparaison de termes généraux positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument donc converge.

On peut aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N |x_n| |y_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2} < +\infty$$

donc la suite des sommes partielles est majorée : la série $\sum x_n y_n$ converge absolument donc converge.

- (b) ℓ^2 est une partie non vide (contient la suite nulle) de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Et, si $x, y \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$$

est un terme général de série convergente par combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes, en utilisant la question précédente.

Donc $x + \lambda y \in \ell^2$ qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'évaluation, φ est linéaire : si $x, y \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x + \lambda y) = (x + \lambda y)_p = x_p + \lambda y_p$ (c'est la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire de suites).

Puis, si $x \in \ell^2$,

$$|\varphi(x)| = |x_p| = \sqrt{x_p^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2} = \|x\|$$

donc $\varphi \in \mathcal{L}_c(\ell^2, \mathbb{R})$.

3. Remarquons qu'on a bien, naturellement, $F \subset \ell^2$.

Soit $x \in F^\perp$. Alors x est orthogonale aux suites de la base canonique $e^{(n)} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n^{\text{e}}}, 0, \dots)$ de F .

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x|e^{(n)}) = x_n = 0$, ce qui conduit à $F^\perp \subset \{0\}$. Par ailleurs, $0 \in F^\perp$, donc $F^\perp = \{0\}$.

On a alors $F \subsetneq (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell^2$ (car il y a des suites dans ℓ^2 qui ne sont pas presque nulles, comme $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, par exemple.)

Exercice 40 : Analyse – Séries géométriques et exponentielles dans une algèbre normée

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que

$$\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

(a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

(b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que

$$(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

1. (a) La norme étant sous-multiplicative, on a, par une récurrence facile, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|u^n\| \leq \|u\|^n$$

qui est un terme général de série géométrique convergente car $\|u\| \in [0, 1[$ donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum \|u^n\|$ converge, donc $\sum u^n$ est absolument convergente.

Comme, de plus, A est de dimension finie, $\sum u^n$ converge.

(b) On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$(e - u) \times \sum_{n=0}^N u^n = \sum_{n=0}^N (e - u) \times u^n = \sum_{n=0}^N (u^n - u^{n+1}) = e - u^{N+1}$$

par télescopage. Or $u^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0_A$ car $\sum u^n$ converge, ou car $\|u^{N+1}\| \leq \|u\|^{N+1} \rightarrow 0$, donc

$$(e - u) \times \sum_{n=0}^N u^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e.$$

Par ailleurs, comme $x \mapsto (e - u)x$ est continue sur A car linéaire sur l'espace vectoriel A de dimension finie,

$$(e - u) \times \sum_{n=0}^N u^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (e - u) \times \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

Par unicité de la limite, $(e - u) \times \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = e$.

On montre de même que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) \times (e - u) = e$.

On a donc que $e - u$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Soit $u \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ qui est un terme général positif de série (exponentielle)

convergente (vers $e^{\|u\|}$), donc $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente par comparaison de terme généraux positifs de séries convergentes, donc convergente car A est de dimension finie.

**Exercice 41 : Analyse – Extremums liés**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2.$$

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .

2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.

(a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

(b) Montrer que $\lambda^2 - 3\lambda - 40 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ .

3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

1. C en tant que sphère euclidienne (un cercle, donc, en dimension 2) de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{13}$ est fermée et bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^2$, donc compacte, et f est continue car polynomiale sur C . Le théorème des bornes atteintes s'applique et dit que f atteint un minimum et un maximum sur C .

2. (a) On réécrit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$ où $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 13$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

On a, avec $(u, v) \in C$,

$$\nabla g(u, v) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(u, v), \frac{\partial g}{\partial y}(u, v) \right) = (2u, 2v) \neq (0, 0)$$

car $0 \notin C$. Comme f est aussi différentiable, le théorème d'optimisation sous contrainte s'applique : on

a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, v), \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \right) = (8u + 12v, 12u - 2v) = \lambda \nabla g(u, v)$.

Après simplification par 2, on obtient exactement

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

$$(b) \text{ On a } (S) \iff \begin{cases} (\lambda - 4)u - 6v = 0 \\ 6u - (\lambda + 1)v = 0 \end{cases}$$

Comme $(u, v) \neq (0, 0) \notin C$, ce système n'est pas de Cramer : il a admet plusieurs solutions distinctes, et a donc un déterminant nul.

On a donc bien $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = \lambda^2 - 3\lambda - 40 = 0$. Ainsi,

$$0 = \left(\lambda - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{169}{4} = \left(\lambda - \frac{3}{2} - \frac{13}{2} \right) \left(\lambda - \frac{3}{2} + \frac{13}{2} \right) = (\lambda - 8)(\lambda + 5)$$

donc $\lambda \in \{-5, 8\}$.

3. ■ Pour $\lambda = -5$, on obtient à partir de (S) l'équation $6v = -9u$ soit $v = -\frac{3}{2}u$.

Or $(u, v) \in C$, donc

$$13 = u^2 + v^2 = u^2 + \frac{9}{4}u^2 = \frac{13}{4}u^2,$$

ce qui donne $(u, v) = (-2, 3)$ ou $(u, v) = (2, -3)$.

On calcule $f(-2, 3) = f(2, -3) = 16 - 72 - 9 = -65$.

■ Pour $\lambda = 8$, on obtient à partir de (S) l'équation $4u = 6v$ soit $u = \frac{3}{2}v$.

Avec un calcul similaire au cas précédent, on obtient donc $(u, v) = (-3, -2)$ ou $(u, v) = (3, 2)$.

On calcule $f(-3, -2) = f(3, 2) = 36 + 72 - 4 = 104$.

Or on sait que le minimum et le maximum de f sont parmi ces valeurs.

Ainsi, nécessairement, $\min_C f = -65$ et $\max_C f = 104$.

Exercice 42 : Analyse - Résolution d'une EDL₁

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

1. Sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto -3$ sont continues, le première ne s'annulant pas, et (H) s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. Une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2x}$ étant $x \mapsto \frac{3}{2} \ln|x| = \frac{3}{2} \ln x$, le théorème de structure dit que

les solutions de (H) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{3}{2} \ln x} = Cx\sqrt{x}$ pour $C \in \mathbb{K}$.

2. Sur $]0, +\infty[$, on a également $x \mapsto \sqrt{x}$ continue, et (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'équation homogène associée (H).

Première méthode La forme de l'équation peut inciter à la recherche d'une solution particulière sous la forme $f_0 : x \mapsto \alpha\sqrt{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Une telle fonction est dérivable, de dérivée $f'_0 : x \mapsto \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}$. Alors

$$f_0 \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_*^+ \iff \text{pour tout } x > 0, \alpha\sqrt{x} - 3\alpha\sqrt{x} = \sqrt{x} \iff \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Donc $f_0 : x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2}$ est solution particulière.

Deuxième méthode Si on ne devine pas la forme d'une solution particulière, on peut utiliser la méthode de variation de la constante qui consiste à chercher une solution sous la forme $f_0 : x \mapsto \lambda(x)x^{3/2}$ avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Une telle fonction est dérivable, de dérivée $f'_0 : x \mapsto \lambda'(x)x^{3/2} + \frac{3}{2}\lambda(x)\sqrt{x}$. Alors

$$f_0 \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_*^+ \iff \forall x > 0, 2x^{5/2}\lambda'(x) = \sqrt{x} \iff \forall x > 0, \lambda'(x) = \frac{1}{2x^2}.$$

On peut choisir $\lambda : x \mapsto \frac{-1}{2x}$ et obtenir que $f_0 : x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2}$ est solution particulière.

Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \mapsto Cx\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ pour $C \in \mathbb{K}$.

3. Supposons que f soit solution de l'équation (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
Il s'agit donc d'une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$, solution de E sur $]0, \infty[$.

$$\text{On a donc } C \in \mathbb{K} \text{ tel que } f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Cx\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Comme $2 \times 0 \times f'(0) - 3f(0) = \sqrt{0}$, on a nécessairement $f(0) = 0$ et donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) = Cx\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ qui n'est pas dérivable en 0 car $x \mapsto x\sqrt{x} = x^{3/2}$ l'est et $x \mapsto \sqrt{x}$ ne l'est pas.

Un autre argument possible consiste à étudier le taux d'accroissement, pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = C\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

ce qui contredit une nouvelle fois la dérivabilité en 0.

Bref, (E) n'admet aucune solution sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 43 : Analyse – Suite récurrente et équation fonctionnelle**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n).$$

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

1. (a) Savoir représenter une telle suite récurrente sur un dessin !

Notons que, comme Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $g : x \mapsto \text{Arctan } x - x$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0$ nulle seulement en 0.

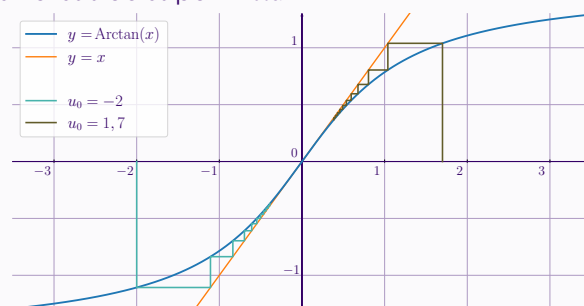
Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et on remarque que $g(0) = 0$.

Finalement, g est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$, nulle seulement en 0.

Remarquons enfin que vu la croissance de la fonction Arctan et le fait que $\text{Arctan } 0 = 0$,

$\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$ sont des intervalles stables par Arctan .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{Arctan}(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-



Alors

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}^-$ et par stabilité (et récurrence) de $\mathbb{R}^-$ par Arctan , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^-$.

Comme g est positive sur $\mathbb{R}^-$, (u_n) croît.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$ et par stabilité (et récurrence) de $\mathbb{R}^+$ par Arctan , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^+$.

Comme g est négative sur $\mathbb{R}^+$, (u_n) décroît.

Remarque : Si $x_0 = 0$, la suite est en fait constamment nulle. Sinon, les monotonies sont même strictes car Arctan est strictement croissante.

Autre rédaction possible : comme la fonction Arctan est croissante, la suite (u_n) est monotone. En effet, en composant n fois par Arctan ,

$$u_0 \leq u_1 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \text{Arctan}^n(u_0) \leq u_{n+1} = \text{Arctan}^n(u_1)$$

et

$$u_0 \geq u_1 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \text{Arctan}^n(u_0) \geq u_{n+1} = \text{Arctan}^n(u_1).$$

Or $u_1 - u_0 = \text{Arctan}(x_0) - x_0 = g(x_0)$ et l'étude précédente de g permet de retrouver la conclusion.

- (b) Dans le premier cas $(u_n) \in \mathbb{R}_-^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par 0, dans le deuxième cas, $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0.

Dans tous les cas, le théorème de la limite monotone assure l'existence de sa limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Par continuité de la fonction Arctan , le passage à la limite dans la relation de récurrence assure que $\ell = \text{Arctan } \ell$ soit $g(\ell) = 0$.

L'étude de la question précédente donne alors $u_n \rightarrow \ell = 0$, unique point fixe de la fonction Arctan .

2. **Analyse** Supposons h fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la suite (u_n) de la question 1, on obtient par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, h(x_0) = h(u_n)$.

Or $u_n \rightarrow 0$ donc, par continuité, $h(u_n) \rightarrow h(0)$ et, par unicité de la limite, $h(x_0) = h(0)$.

Comme cela est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on en déduit que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Synthèse Réciproquement, toute fonction h constante est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Conclusion L'ensemble des h continues telles que $h = h \circ \text{Arctan}$ est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 44 : Analyse – Autour de l'adhérence

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

1. (a) $x \in \overline{A} \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow x.$

Autrement dit, $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A .

(b) Supposons $A \subset B$.

■ **Avec des suites** : Soit $x \in \overline{A}$. Alors x est limite d'une suite d'éléments de A qui est aussi une suite d'éléments de B , donc $x \in \overline{B}$. Ainsi, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

■ **On peut aussi revenir à la définition** : si $x \in \overline{A}$, pour tout $r > 0$,

$$\emptyset \neq B(x, r) \cap A \subset B(x, r) \cap B$$

donc $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{B}$. Ainsi, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

■ **On peut utiliser la caractérisation de l'adhérence** comme étant le plus petit fermé contenant la partie : comme $\overline{B}$ est un fermé contenant B donc A , il est plus grand au sens de l'inclusion que $\overline{A}$ c'est-à-dire $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. On a déjà $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc, avec la question précédente, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Puis

■ **Avec la caractérisation** : $\overline{A \cup B}$ est un fermé contenant $A \cup B$, donc le plus petit ensemble vérifiant cette propriété vérifie $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

■ **Avec des suites** : si $x \in \overline{A \cup B}$, on a une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Soit les ensembles $\mathbb{N}_A = \{n \in \mathbb{N}, x_n \in A\}$ et $\mathbb{N}_B = \{n \in \mathbb{N}, x_n \in B\}$ vérifient $\mathbb{N}_A \cup \mathbb{N}_B = \mathbb{N}$. L'un d'entre eux au moins est donc infini.

On peut alors, avec un tel ensemble infini, construire une extractrice φ dont l'image est exactement cet ensemble : $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_A$ ou $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_B$.

On obtient alors $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ ou $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$, donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ et, finalement, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. (a) ■ **Avec 1.b** : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

■ **Avec la définition** : si $x \in \overline{A \cap B}$, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \cap B \neq \emptyset$ donc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et on a bien $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

■ **Avec la caractérisation** : $\overline{A \cap B}$ est un fermé contenant $A \cap B$ car $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) Prenons $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$. Alors $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

**Exercice 45 : Analyse – Autour de l'adhérence**

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E .

Soit A une partie non vide de E . On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
 (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
 (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
 (b) On suppose que A est fermée et que $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
 Prouver que A est convexe.

1. (a) $x \in \overline{A} \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow x.$

Autrement dit, $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A .

- (b) Supposons A est convexe, et donnons-nous $x, y \in \overline{A}$ et $t \in [0, 1]$.

On a donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \rightarrow x$ et $b_n \rightarrow y$.

Alors $(ta_n + (1-t)b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ par convexité de A et $ta_n + (1-t)b_n \rightarrow tx + (1-t)y$ donc $tx + (1-t)y \in \overline{A}$.

En résumé, $\overline{A}$ est convexe.

2. (a) Soit $x \in E$ tel que $d_A(x) = 0$.

- **Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure** : on a $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - a_n\| \rightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = d_A(x) = 0,$$

c'est-à-dire $a_n \rightarrow x$.

Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $x \in \overline{A}$.

- **Par caractérisation de la borne inférieure** : pour tout $r > 0$, on a $a \in A$ tel que $\|x - a\| < r$ (r n'est pas un minorant de $\{\|x - a\|, a \in A\}$), autrement dit $a \in A \cap B(a, r) \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{A}$.

- (b) On suppose que A est fermée et que $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.

On se donne $x, y \in A$ et $t \in [0, 1]$. On veut montrer que $tx + (1-t)y \in A$.

Comme $x, y \in A, d_A(x) = d_A(y) = 0$ donc

$$0 \leq d_A(tx + (1-t)y) \leq t \cdot 0 + (1-t) \cdot 0$$

donc $d_A(tx + (1-t)y) = 0$.

On en déduit avec la question précédente que $tx + (1-t)y \in \overline{A}$.

Or A est fermée donc $A = \overline{A}$ donc $tx + (1-t)y \in A$.

Finalement, on a bien montré que A est convexe.

Exercice 46 : Analyse - Étude d'une série semi-convergente

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$,

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge.

3. $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge-t-elle absolument ?

1. On utilise le développement limité fort en 0 en à l'ordre 2

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

On a

$$\begin{aligned} \pi \sqrt{n^2 + n + 1} &= n\pi \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n\pi \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \\ &= n\pi \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \\ &= n\pi \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)}$.

2. On en déduit que

$$\begin{aligned} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right) &= \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = (-1)^n \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= (-1)^{n+1} \underbrace{\sin \left(\frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)}_{\rightarrow 0} = (-1)^{n+1} \left(\frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Or $\sum (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n}$ converge en vertu du théorème spécial sur des séries alternées car $\left(\frac{3\pi}{8n} \right)_n$ décroît et tend vers 0, et un $\mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ est un terme général de série absolument convergente donc convergente par comparaison au terme général positif de série de Riemann convergente $\frac{1}{n^2}$ car $2 > 1$.

L'ensemble des termes généraux de séries convergentes formant un espace vectoriel,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right) \text{ converge.}}$$

3. D'après la question précédente, $|\cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right| \sim \left| (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} \right| = \frac{3\pi}{8n}$ avec $\frac{1}{n}$ terme général positif de série de Riemann divergente (série harmonique).

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\boxed{\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right) \text{ ne converge pas absolument.}}$

**Exercice 47 : Analyse – Rayon de convergence et somme de séries entières**

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}.$

2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

1. La série entière étant lacunaire, on utilise le critère de d'Alembert général. Pour tout réel x , on pose $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$. Pour x non nul,

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{3nx^2}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |3x^2|$$

Donc, si $|3x^2| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument et si $|3x^2| > 1$ c'est-à-dire si

$|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge. On en déduit que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On pose $\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}.$

Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a $\forall t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t).$

Ainsi $\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, $S(x) = -\ln(1-3x^2).$

2. Posons les suites (b_n) et (c_n) telles que $b_n = a_{2p}$ si $n = 2p$ et 0 sinon, et $c_n = a_{2p+1}$ si $n = 2p+1$ et 0 sinon. Alors les séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont même rayon de convergence que $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ respectivement. Or

- $\sum 4^n x^{2n} = \sum (4x^2)^n$ converge si et seulement si $|4x^2| < 1$ si et seulement si $|x| < \frac{1}{2}$: son rayon de convergence est $R_1 = \frac{1}{2}$.
- $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = \sum (5x^2)^n$ converge si et seulement si $|5x^2| < 1$ si et seulement si $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$: son rayon de convergence est $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Finalement, $\sum a_n x^n$ est la somme des séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ qui ont des rayons de convergence

$R_1 \neq R_2$ donc celui de $\sum a_n x^n$ vaut $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Autre argument possible avec la sommabilité : les séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux si et seulement si c'est le cas de $\sum a_n x^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquets avec $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} + 1)$). On en déduit que $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Autre argument possible sans la sommabilité : $a_{2n} x^{2n} \rightarrow 0$ et $a_{2n+1} x^{2n+1} \rightarrow 0$ si et seulement si $a_n x^n \rightarrow 0$.

D'après ce qui précède, on en déduit également que (sommation par paquet ou passage par les sommes partielles ou en utilisant une somme de séries entières)

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.$$

Exercice 48 : Analyse – Orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N_1

$\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 - (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 - (b) Démontrer que $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt$.
 - (c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

1. Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
2. On pose, pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, fonction continue sur un segment donc bornée, $N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

(a) f et $P_n - f$ étant continues sur le segment $[0, 1]$ donc bornées,

$$\forall t \in [0, 1], |P_n(t)f(t) - f^2(t)| = |f(t)| \cdot |P_n(t) - f(t)| \leq N_\infty(f)N_\infty(P_n - f).$$

On en déduit que

$$N_\infty(P_n f - f^2) \leq N_\infty(f) N_\infty(P_n - f) \quad (1)$$

Or (P_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ donc $N_\infty(P_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, d'après (1), $N_\infty(P_n f - f^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $(P_n f)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f^2 .

(b) On utilise le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues sur un segment :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}, P_n f$ est continue sur $[0, 1]$.

H2 D'après la question précédente, $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .

$$\text{Donc } \int_0^1 P_n(t) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt.$$

(c) $P \mapsto \int_0^1 P(t) f(t) dt$ et $P \mapsto 0$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ donc elles sont

$$\text{égales. Ainsi, } \int_0^1 P_n(t) f(t) dt = 0.$$

3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$. Or f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, donc f^2 est nulle sur $[0, 1]$ et donc f est nulle sur $[0, 1]$.

**Exercice 49 : Analyse – Théorème d'intégration terme à terme**

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
- (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = n!$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

- (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum \frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x .

- (a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement; donc la suite (a_n) converge vers 0 et donc elle est bornée.

Autre méthode : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq M = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

- (b) Soit $t \in [0, +\infty[$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq M \frac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.

On a donc vérifié la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|f_n| : t \mapsto \frac{|a_n|}{n!} g_n(t)$ d'où la convergence de l'intégrale et sa valeur $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$.

- (b) On utilise le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

H1 $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et a pour somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b) dont on a admis la continuité sur $[0, +\infty[$.

H2 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question 2.(a)

H3 $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$ terme général de série convergente par hypothèse.

Alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 50 : Analyse – Étude d’une intégrale à paramètre

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

$$1. \text{ Notons } f : \begin{cases}]0; +\infty[\times]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{e^{-2t}}{x+t} \end{cases}$$

On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

H1 $\forall t \in]0; +\infty[, x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

H2 $\forall x \in]0; +\infty[, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

H3 Domination sur tout segment Soit $[a, b]$ un segment de $]0; +\infty[$. $\forall x \in [a, b], \forall t \in [0; +\infty[$,

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{a} e^{-2t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0; +\infty[$ car $2 > 0$.

On en déduit que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

$$2. \forall x \in]0; +\infty[, xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} e^{-2t} dt. \text{ Posons } \forall x \in]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, h_x(t) = \frac{x}{x+t} e^{-2t}.$$

On utilise l’extension du théorème de convergence dominée appliquée à $(h_x)_{x \in]0; +\infty[}$:

H1 $\forall t \in [0; +\infty[, h_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-2t} = h(t)$.

H2 Toutes les fonctions h_x et la fonction h sont continues par morceaux sur $[0; +\infty[$.

H3 Domination globale $\forall x \in]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, |h_x(t)| \leq e^{-2t} = h(t)$ et h est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0; +\infty[$.

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} h_x(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}. \text{ Ainsi, } xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

$$3. \text{ Et donc } F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Autre méthode (mais qui n’est pas attendue ici) : le changement de variable $u = x + t$ donne

$$F(x) = e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du \text{ ce qui redonne existence et continuité.}$$

Puis, la dérivée de $u \mapsto \frac{e^{-2u}}{u}$ valant $u \mapsto -\frac{2u+1}{u^2} e^{-2u}$, on « remarque » que

$$\frac{e^{-2u}}{u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u},$$

donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u} du = e^{2x} \left[-\frac{e^{-2u}}{2u} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Ou alors on effectue une intégration par parties et on utilise un théorème d’intégration de $\circ$ dans le cas de convergence.

$$\text{D’où en particulier } xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

**Exercice 51 : Analyse – DSE d'Arcsin et calcul d'une somme de série**

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{Arcsin } x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)} > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4 (2n+3)} = \frac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall u \in]-1, 1[, (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n.$$

En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -t$, $R = 1$ et $\forall t \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\dots(-(2n-1))}{2^n n!} (-t)^n.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2 \cdot 4 \dots 2n = 2^n n!$, on obtient

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

Conclusion : $R = 1$ et $\forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$.

3. D'après la question précédente, en remarquant que $x \in]-1, 1[\iff t = x^2 \in [0, 1[$ et $[0, 1[\subset]-1, 1[$, il vient

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

avec un rayon de convergence $R = 1$.

Or Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ avec $\text{Arcsin}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé. On obtient

$$\forall x \in]-1, 1[, \text{Arcsin } x = \underbrace{\text{Arcsin } 0}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

avec un rayon de convergence $R = 1$.

4. Prenons $x = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$ dans le développement précédent. On en déduit que

$$\frac{\pi}{6} = \text{Arcsin} \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 52 : Analyse – Dérivées partielles et classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de deux variables

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
(a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

1. L'inégalité à démontrer est équivalente à $(x - y)^2 \geq 0$, ce qui est bien vrai.
2. (a) En particulier, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $x^2 + y^2 - xy > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
(b) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opération. Pour que f soit continue en $(0, 0)$, il faut que α soit la limite de f en $(0, 0)$.
Or, avec l'inégalité de la question 1, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq f(x, y) \leq \frac{2y^4}{x^2 + y^2} \leq 2y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 2y^2$ donc
 $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \alpha = 0$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser les coordonnées polaires pour calculer la limite de $\frac{2y^4}{x^2 + y^2} (\leq 2r^2)$.

3. (a) Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.
On trouve après calcul, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^4(y - 2x)}{(x^2 + y^2 - xy)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^3(2y^2 - 3xy + 4x^2)}{(x^2 + y^2 - xy)^2}.$$

- (b) ■ L'application partielle $f_x : x \mapsto f(x, 0)$ vaut 0 que x soit nul ou non, donc $f_x : x \mapsto 0$.
Donc $f'_x(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
■ L'application partielle $f_y : y \mapsto f(0, y)$ vaut y^2 lorsque $y \neq 0$ et 0 sinon, donc $f_y : y \mapsto y^2$.
Donc $f'_y(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- (c) Par opérations, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Analysons la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$: on a vu que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

On calcule, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, avec la question 1,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{4y^4 |y - 2x|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 |y - 2x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{4 |y|^3 |2y^2 - 3xy + 4x^2|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{4 (2 |y|^3 + 3 |x| y^2 + 4 |y| x^2)}{x^2 + y^2} \leq 4 (2 |y| + 3 |x| + 4 |y|) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.

Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser les coordonnées polaires pour calculer les limites de $\frac{4y^4 |y - 2x|}{(x^2 + y^2)^2} (\leq 12r)$ et $\frac{4y^3 |2y^2 - 3xy + 4x^2|}{(x^2 + y^2)^2} (\leq 36r)$.

**Exercice 53 : Analyse – Étude d'une série de fonctions**

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

- (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $f(x)$.

1. (a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0, 0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^4x^4} = \frac{1}{n^4|x|^3}$ qui est un terme général positif de série convergente (série de Riemann avec $4 > 1$) donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge.

On a bien montré que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a, +\infty[, x \neq 0$, donc comme dans la première question,

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^4x^4} = \frac{1}{n^4|x|^3} \leq \frac{1}{a^3n^4} \quad \text{qui ne dépend pas de } x.$$

Donc f_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et $N_{\infty, [a, +\infty[}(f_n) \leq \frac{1}{a^3n^4}$ qui est un toujours un terme général de série convergente comme dans la question précédente.

On a donc bien convergence normale sur $[a, +\infty[$, et a fortiori sur $[a, b] \subset [a, +\infty[$ de $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(Avec $N_{\infty, [a, b]}(f_n) \leq N_{\infty, [a, +\infty[}(f_n)$.)

- (c) On montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

- Il suffit pour cela de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, +\infty[^\mathbb{N}$ telle que $\sum f_n(x_n)$ ne converge pas absolument. En effet, comme $|f_n(x_n)| \leq N_{\infty, [0, +\infty[}(f_n)$ dans $[0, +\infty[$, on aura alors divergence de $\sum N_{\infty, [0, +\infty[}(f_n)$.

Comme le problème se situe au voisinage de 0, il est naturel de chercher une suite tendant vers 0.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{n}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x_n) = \frac{1}{2n}$ qui est un terme général de série divergente (série harmonique) et donc, a fortiori, non absolument convergente.

- On peut aussi conclure en calculant exactement $N_{\infty, [0, +\infty[}(f_n)$ et en vérifiant qu'il s'agit d'un terme général de série divergente. On a f_n dérivable sur $[0, +\infty[$,

$$f'_n : x \mapsto \frac{(1+n^4x^4) - x \cdot 4n^4x^3}{(1+n^4x^4)^2} = \frac{1-3n^4x^4}{(1+n^4x^4)^2} = \frac{(1+\sqrt{3}n^2x^2)(1-\sqrt{3}n^2x^2)}{(1+n^4x^4)^2} = \frac{(1+\sqrt{3}n^2x^2)(1-\sqrt[4]{3}nx)(1-\sqrt[4]{3}nx)}{(1+n^4x^4)^2}$$

Donc f_n est positive, croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}n}, +\infty\right]$. Donc

$$N_{\infty, [0, +\infty[}(f_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}n}\right) = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}n}$$

qui est un terme général de série divergente (série harmonique).

2. On utilise le théorème de continuité des séries de fonctions.

Comme les f_n et donc f sont impaires, il suffit de travailler sur $\mathbb{R}_*^+$. Or

H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_*^+)$.

H2 $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_*^+$.

Donc f est continue sur tout $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_*^+$.

Par imparité, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On utilise le théorème de limite des séries de fonctions.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car pour $x > 0$, $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n4x^3}$.

H2 $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $[1, +\infty[$ donc au voisinage de tout point de $+\infty$.

Donc
$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.}$$

**Exercice 54 : Analyse – Norme et continuité d'une forme linéaire**

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2. On pose $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

(a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

(b) Prouver que $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. Prouver que f est continue sur E .

1.
 - E est une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
 - E est non vide (par exemple la suite nulle est une suite réelle tendant vers 0),
 - par propriété de la limite de suite, une combinaison linéaire de suites réelles tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.

Par caractérisation, E un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2. (a) **Bonne définition** Une suite réelle tendant vers 0 étant bornée, $\|u\|$ est bien définie pour $u \in E$, à valeurs réelles (et positives, ce qui est aussi une conséquence de ce qui suit).

Séparation Soit $u \in E$. Si $\|u\| = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 0 = u_n$ donc $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_E$.

Homogénéité Si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $|\lambda| \geq 0$,

$$\|\lambda u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\lambda| |u_n|) = |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

Inégalité triangulaire Si $u, v \in E$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{qui ne dépend pas de } n$$

$$\text{donc } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

- (b) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Alors, comme $u_n \rightarrow 0$, $\frac{u_n}{2^{n+1}} = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ avec $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ terme général positif de série géométrique convergente car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ est absolument convergente en dimension finie, donc converge.}$$

- (c) On remarque que f est une forme linéaire de E car pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ par linéarité de l'évaluation, et f est à valeurs réelles.

Comme E est de dimension infinie, sa linéarité n'est pas automatique : il faut trouver une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall u \in E, |f(u)| \leq c \|u\|$.

Or, si $u \in E$, par inégalité triangulaire et définition de $\|\cdot\|$,

$$|f(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \|u\| = \|u\|$$

ce qui confirme la continuité de la forme linéaire f .

Exercice 55 : Analyse – Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

- (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
- Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
Indication : discuter suivant les valeurs de a .

- (a) ■ On peut utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- ★ E est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- ★ E n'est pas vide car il contient la suite nulle.
- ★ E est stable par combinaison linéaire : si $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + \lambda v)_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = 2a(u + \lambda v)_{n+1} + 4(ia - 1)(u + \lambda v)_n$$

par linéarité de l'équation de récurrence.

- On peut aussi plus élégamment remarquer que

$$E = \text{Ker } f \quad \text{où} \quad f : \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+2} - 2au_{n+1} - 4(ia - 1)u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

c'est-à-dire $f = g^2 - 2ag - 4(ia - 1)\text{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$ linéaire car $g : u \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par linéarité de l'évaluation.

On obtient bien que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- (b) On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$$

Elle est linéaire (toujours par linéarité de l'évaluation), bijective car la connaissance du couple (u_0, u_1) de complexes détermine entièrement et uniquement la suite, vu la relation de récurrence qui définit E .

Il s'agit donc d'un isomorphisme, ce qui justifie que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.

- L'équation caractéristique associée à la récurrence est

$$0 = r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = (r - a)^2 - (a^2 + 4ia - 4) = (r - a)^2 - (a + 2i)^2 = (r - 2(a + i))(r + 2i).$$

Soit $2(a + i) \neq -2i$ **ie** $a \neq -2i$ **et** l'équation possède deux racines distinctes $2(a + i)$ et $-2i$. On a alors $A, B \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A \cdot (2(a + i))^n + B \cdot (-2i)^n.$$

$$\text{Les conditions initiales donnent } \begin{cases} u_0 = 1 = A + B & (L_1) \\ u_1 = 1 = 2(a + i)A - 2iB & (L_2) \end{cases}$$

$$\text{Les opérations } \frac{2i(L_1) + (L_2)}{2(a + 2i)} \text{ et } \frac{2(a + i)(L_1) - (L_2)}{2(a + 2i)} \text{ conduisent à } A = \frac{2i + 1}{2(a + 2i)} \text{ et } B = \frac{2(a + i) - 1}{2(a + 2i)}.$$

Soit $2(a + i) = -2i$ **ie** $a = -2i$ **et** l'équation possède une racine double $-2i$. On a alors $A, B \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + nB)(-2i)^n.$$

$$\text{Les conditions initiales donnent } \begin{cases} u_0 = 1 = A & (L_1) \\ u_1 = 1 = -2iA - 2iB & (L_2) \end{cases}$$

$$\text{Ce qui conduit à } A = 1 \text{ et } B = \frac{i}{2} - 1.$$

**Exercice 56 : Analyse – Extremums d'une fonction de deux variables**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

- f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
- f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
- On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

- Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale, et comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, si elle admet un extremum local, c'est en un point critique.

Or on calcule, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x - 6y$.

Les points critiques de f sont les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = y$ et $6x^2 + 6x = 0$, il s'agit donc des couples $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.

Comme f est même de classe $\mathcal{C}^2$, on peut calculer la hessienne en ces points.

Or, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6$.

- $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ a un déterminant strictement négatif, donc $(0, 0)$ est un point selle.
- $H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ a un déterminant strictement positif, donc

f présente un extremum local strict en $(-1, -1)$.

Comme, de plus, sa trace est strictement négative, $\text{Sp}(H_f(-1, -1)) \subset \mathbb{R}_-^*$ et

il s'agit d'un maximum local strict, valant $f(-1, -1) = 3$.

De plus, f n'admet ni minimum local, ni maximum local autre que celui en $(-1, -1)$.

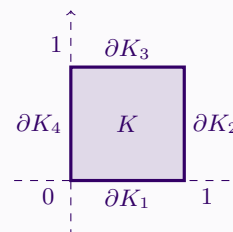
- Comme $f(x, 0) = 2x^3 + 2$ a des limites $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, f ne peut admettre d'extremum global.
- $K = [0, 1] \times [0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit cartésien de deux compacts, ou bien encore de fermé borné en dimension finie.

Comme f est continue sur K , le théorème des bornes atteintes assure l'existence d'un maximum global de f sur K .

S'il est atteint en un point de l'ouvert $\overset{\circ}{K}$, c'est en un point critique. Or $\overset{\circ}{K} =]0, 1[^2$ et $(0, 0) \notin \overset{\circ}{K}$, $(-1, -1) \notin \overset{\circ}{K}$. C'est donc sur le bord ∂K de K qu'il est atteint.

Découpons ce bord ∂K en quatre morceaux :

- $\partial K_1 = [0, 1] \times \{0\}$
- $\partial K_2 = \{1\} \times [0, 1]$
- $\partial K_3 = [0, 1] \times \{1\}$
- $\partial K_4 = \{0\} \times [0, 1]$



Le bord ∂K_1 se paramètre en $x \in [0, 1]$ et $y = 0$. Or, $g_1 : x \mapsto f(x, 0) = 2x^3 + 2$ est strictement croissante sur $[0, 1]$ et atteint un maximum en $x = 1$ valant $f(1, 0) = 4$.

Le bord ∂K_2 se paramètre en $x = 1$ et $y \in [0, 1]$. Or, $g_2 : y \mapsto f(1, y) = 4 + 6y - 3y^2 = 7 - 3(y - 1)^2$ atteint un maximum en $y = 1$ valant $f(1, 1) = 7$. On aurait aussi pu faire l'étude de la fonction g_2 .

Le bord ∂K_3 se paramètre en $x \in [0, 1]$ et $y = 1$. Or, $g_3 : x \mapsto f(x, 1) = 2x^3 + 6x - 1$ est strictement croissante sur $[0, 1]$ et atteint un maximum en 1 valant $f(1, 1) = 7$.

Le bord ∂K_4 se paramètre en $x = 0$ et $y \in [0, 1]$. Or, $g_4 : y \mapsto f(0, y) = 2 - 3y^2$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et atteint un maximum en 0 valant $f(0, 0) = 2$.

Finalement, le maximum global de f sur K vaut 7 (et il est atteint en un point unique : $(1, 1)$).

[On obtient aussi le minimum global de f sur K valant 2, atteint en un point unique : $(0, 0)$.]

Exercice 57 : Analyse – Différentiabilité et classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de deux variables

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.

(b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. (a) $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| \leq \eta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \varepsilon}$ pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) f différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si

$$\boxed{\text{il existe } \ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ telle que } f(h, k) = f(0, 0) + \ell((h, k)) + o_{(h, k) \rightarrow (0, 0)}(\|(h, k)\|)}.$$

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.

Puis, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |xy| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |xy| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ donc $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2}.$

(b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.

Pour obtenir la classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$, il faut montrer que les dérivées partielles existent et sont continues en $(0, 0)$.

Remarquons que, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = xy \left(1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2}\right)$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \left(1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2}\right) + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Par ailleurs, l'application partielle $f_x : x \mapsto f(x, 0) = 0$ que x soit nul ou non, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut $f'_x(0) = 0$. Enfin,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq \frac{|y|(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) + 4x^2 y^2 |y|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{|y|(x^2 + y^2)^2 + 4(x^2 + y^2)^2 |y|}{(x^2 + y^2)^2} = 5|y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

On aurait aussi pu utiliser les coordonnées polaires $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| \leq 5r \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$.

Par antisymétrie $f(y, x) = -f(x, y)$, on a aussi que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue en $(0, 0)$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}.$

Remarque : cette fonction due à Péano est célèbre pour être un contre-exemple du théorème de Schwarz : on vérifie que les dérivées partielles d'ordre 2 existent bien et que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq 0$ (le signe se voit par l'antisymétrie), ce qui permet de conclure que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0, 0)$.

**Exercice 58 : Analyse – Différentielle d'une application bilinéaire**

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On pose $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

(a) Prouver que

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

(b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

1. f différentiable en a si et seulement si

$$\text{il existe } \ell_a \in \mathcal{L}(E, F) \text{ telle que } f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(\|h\|).$$

2. (a) Une première solution consiste à affirmer que B est bilinéaire sur E de dimension finie donc est automatiquement continue (pour n'importe quelle norme), ce qui se traduit d'après le cours par l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

Si on veut redémontrer ce résultat du cours et préciser C , on décompose dans la base e les vecteurs

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \text{ et on a alors par bilinéarité}$$

$$|B(x, y)| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i| |y_j| |B(e_i, e_j)| \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |B(e_i, e_j)| \right) \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

$$\text{donc } C = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |B(e_i, e_j)| \text{ convient.}$$

(b) On calcule

$$B(u_0 + h, v_0 + k) = B(u_0, v_0) + B(h, v_0) + B(u_0, k) + B(h, k)$$

avec $\ell : (h, k) \mapsto B(h, v_0) + B(u_0, k)$ linéaire sur E par bilinéarité de B . En effet,

$$\ell((h, k) + \lambda(h', k')) = B(h + \lambda h', v_0) + B(u_0, k + \lambda k') = B(h, v_0) + \lambda B(h', v_0) + B(u_0, k) + \lambda B(u_0, k') = \ell((h, k)) + \lambda \ell((h', k'))$$

Il reste à montrer que $B(h, k) = o_{(h, k) \rightarrow (0_E, 0_E)}(\|(h, k)\|)$.

C'est une conséquence de la question précédente

$$|B(h, k)| \leq C \|(h, k)\|^2 = \|(h, k)\| \underbrace{(C \|(h, k)\|)}_{\rightarrow 0}$$

donc

$$\frac{|B(h, k)|}{\|(h, k)\|} \xrightarrow{(h, k) \rightarrow 0} 0.$$

Finalement, B est différentiable en (u_0, v_0) et $dB(u_0, v_0) : (h, k) \mapsto B(h, v_0) + B(u_0, k)$.



ALGÈBRE : EXERCICES 59 À 94

Exercice 59 : Algèbre – Étude d'un endomorphisme sur des polynômes

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

- (a) sans utiliser de matrice de f ,
- (b) en utilisant une matrice de f .

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. f est-il diagonalisable ?

1. (a) $f = \text{id}_E - D$ où $D : P \mapsto P'$ est linéaire car D l'est et si $P \in E = \mathbb{K}_n[X]$, $\deg(f(P)) \leq \max(\deg P, \deg P') \leq n$ donc $f \in \mathcal{L}(E)$.

Comme E est de dimension finie, il suffit de démontrer que f est injectif.

Or $P \in \text{Ker } f \iff P = P'$. Comme

$$\deg P' = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

on a donc $P \in \text{Ker } f \iff \deg P = -\infty \iff P = 0_E$.

Donc f est injective, donc f est bijectif car E est de dimension finie.

- (b) Calculons la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E . On a $f(1) = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(X^k) = -kX^{k-1} + X^k$. Donc

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -n \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure sans coefficient nul sur la diagonale : elle est inversible et

f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$. Pour $P \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $(f(P))^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}$.

Comme $P^{(n+1)} = 0_E$, $\sum_{k=0}^n (f(P))^{(k)} = P^{(0)} - P^{(n+1)} = P$ par télescopage.

Ainsi, l'unique antécédent de Q par f est $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

3. Vu la matrice de f calculée précédemment, $\text{Sp}(f) = \{1\}$.

Si f était diagonalisable, elle serait représentée par la matrice identité, ce qui contredit le fait que $f \neq \text{id}_E$.

Autre argument possible, si f était diagonalisable, on aurait $\dim E_1(f) = \dim E_1(M) = n - \text{rg}(M - I_n) = 0$ ce qui contredit le fait que $\text{rg}(M - I_n) = n - 1$ (ou que $M - I_n$ n'est pas inversible, plus simplement, car sa première colonne est nulle).

Ainsi, f n'est pas diagonalisable.

**Exercice 60 : Algèbre – Noyau et image d'un endomorphisme matriciel**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

1.

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \iff AM = O_2 \iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 2y + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -2t \end{cases}$$

donc $\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}, (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{libre car non colinéaires}} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker } f$.

2. Comme $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, la surjectivité de f équivaut à son injectivité. Or, d'après la question précédente, f n'est pas injectif. Il n'est donc pas surjectif non plus.
3. D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = \text{rg } f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Ker } f = 4 - 2 = 2$. Il suffit donc de connaître deux vecteurs (matrices) non colinéaires de $\text{Im } f$ pour en avoir une base.

Or $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{Im } f$.

Autre rédaction possible :

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \left\{ \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 2x + 4z & 2y + 4t \end{pmatrix}, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \left\{ (x + 2z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (y + 2t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{libre car non colinéaires}} \right) \end{aligned}$$

4. On a déjà, par le théorème du rang (ou les questions précédentes), $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$. On s'intéresse alors à $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Or, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{a \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \text{Ker } f} = \underbrace{c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\in \text{Im } f} \iff \begin{cases} -2a = c \\ a = 2c \\ -2b = d \\ b = 2d \end{cases} \iff a = b = c = d = 0$$

donc $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{O_2\}$ et finalement, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 61 : Algèbre – Norme d'algèbre et exponentielle de matrice

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|.$$

Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p.$$

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

Est-elle convergente ?

1. Il s'agit de la norme infini sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Bonne définition Le maximum étant pris sur un ensemble fini, il n'y a pas de problème de définition. Il est à valeur réelle (et positive, ce qui est aussi une conséquence des propriétés suivantes).

Séparation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\|A\| = 0$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $|a_{i,j}| = 0 = a_{i,j}$, donc $A = O_n$.

Homogénéité Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $|\lambda| \geq 0$,

$$\|\lambda A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (|\lambda| |a_{i,j}|) = |\lambda| \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

Inégalité triangulaire Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{qui ne dépend pas de } (i, j)$$

$$\text{donc } \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$|[AB]_{i,j}| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n (\|A\| \cdot \|B\|) = n \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\text{donc } \|AB\| \leq n \|A\| \cdot \|B\|.$$

On montre que pour tout entier $p \geq 1$, $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$ par récurrence (si l'interrogateur insiste pour qu'elle soit posée) :

Initialisation Pour $p = 1$, il n'y a rien à faire. Le cas $p = 2$ découle de ce qui précède avec $A = B$.

Hérédité Soit $p \geq 1$ tel que $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$. Alors, en utilisant l'inégalité précédente avec $B = A^p$,

$$\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\| \leq n \|A\| \cdot \|A^p\| \leq n^p \|A\|^{p+1}$$

par hypothèse de récurrence, ce qui établit la récurrence.

3. On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left\| \frac{A^p}{p!} \right\| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{(n \|A\|)^p}{p!}$ qui est un terme général positif de série (exponentielle) convergente (vers $\frac{\exp(n \|A\|)}{n}$), donc $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente par comparaison de terme généraux positifs de séries convergentes.

On peut aussi utiliser une norme d'algèbre, par exemple une norme subordonnée, pour laquelle $N(A^p) \leq N(A)^p$ pour conclure.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, la convergence absolue implique la convergence de la série $\sum \frac{A^p}{p!}$.

**Exercice 62 : Algèbre – Polynôme annulateur et somme directe**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$
 - (a) en utilisant le lemme des noyaux.
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

1. Comme $f^2 - f - 2\text{id}_E = 0$, on a $f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{id}_E\right) = \text{id}_E = \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{id}_E\right) \circ f$ donc f est bijectif de réciproque

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(f - \text{id}_E).$$

2. (a) Comme $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est un polynôme annulateur de f , avec $(X + 1) \wedge (X - 2) = 1$ donc, par le lemme de décomposition des noyaux,

$$E = \text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_E).$$

- (b) Raisonnons par analyse-synthèse pour obtenir l'unicité puis l'existence de tout vecteur de $x \in E$ en somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

Analyse Supposons que x s'écrive effectivement

$$x = x_1 + x_2 \quad (1)$$

avec $x_1 \in \text{Ker}(f + \text{id}_E) = E_{-1}(f)$, c'est-à-dire $f(x_1) = -x_1$, et $x_2 \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) = E_2(f)$, c'est-à-dire $f(x_2) = 2x_2$. Alors

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = -x_1 + 2x_2 \quad (2)$$

On obtient, à l'aide de $\frac{1}{3}(2 \cdot (1) - (2))$ et $\frac{1}{3}((1) + (2))$:

$$x_1 = \frac{1}{3}(2x - f(x))$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(x + f(x))$$

d'où l'unicité de l'écriture, sous réserve d'existence.

Synthèse Réciproquement, posons $x_1 = \frac{1}{3}(2x - f(x))$ et $x_2 = \frac{1}{3}(x + f(x))$. Alors

- $x_1 + x_2 = x$
- $f(x_1) = \frac{1}{3}(2f(x) - f^2(x)) = \frac{1}{3}(f(x) - 2x) = -x_1$ car $f^2(x) - f(x) - 2x = 0_E$ par hypothèse, donc $x_1 \in \text{Ker}(f + \text{id}_E)$.
- $f(x_2) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x)) = \frac{1}{3}(2f(x) + 2x) = 2x_2$ car $f^2(x) - f(x) - 2x = 0_E$ par hypothèse, donc $x_2 \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

D'où l'existence

Conclusion On a donc montré que $\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in \text{Ker}(f + \text{id}_E) \times \text{Ker}(f - 2\text{id}_E), x = x_1 + x_2$, c'est-à-dire

$$E = \text{Ker}(f + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_E).$$

3. Comme E est de dimension finie, d'après la formule du rang puis en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\dim \text{Im}(f + \text{id}_E) = \dim E - \dim \text{Ker}(f + \text{id}_E) = \dim \text{Ker}(f - 2\text{id}_E).$$

Il suffit donc de démontrer une seule inclusion pour obtenir l'égalité des deux sous-espaces.

Fixons $y \in \text{Im}(f + \text{id}_E)$. On a $x \in E$ tel que $y = f(x) + x$.

Alors $f(y) = f^2(x) + f(x) = 2f(x) + 2x = 2y$ car, par hypothèse, $f^2(x) - f(x) - 2x = 0_E$.

Ainsi, $y \in E_2(f) = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

On a donc $\text{Im}(f + \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ et donc

$$\text{Im}(f + \text{id}_E) = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E).$$

Exercice 63 : Algèbre – Endomorphismes normaux

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

Déterminer un endomorphisme u de E , non nul, vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
- (iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

1. La réponse est négative.

- Il suffit de considérer la rotation plane de centre $(0, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. C'est, par définition, un endomorphisme tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) \perp (x, y)$: une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme un vecteur en un vecteur qui lui est orthogonal.
- Si on préfère faire des calculs, on peut se placer dans le plan complexe. Alors l'écriture d'une telle rotation est, en notant $(x', y') = u(x, y)$,

$$x' + iy' = e^{i\frac{\pi}{2}}(x + iy) = i(x + iy) = -y + ix$$

Donc

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

ce qui redonne la linéarité de u et le fait que $(u(x, y)|(x, y)) = x'x + y'y = -xy + xy = 0$.

- Si on préfère utiliser des matrices, on représente u dans la base canonique par la matrice de rotation

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve alors le fait que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

et on a de nouveau $(u(x, y)|(x, y)) = x'x + y'y = -xy + xy = 0$.

2. Le plus efficace consiste à démontrer le cycle d'implications

$$(i) \implies (iii) \implies (ii) \implies (i)$$

(i) $\implies$ (iii) On suppose $u \circ u^* = u^* \circ u$. Soit $x \in E$.

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) \underset{\text{définition de } u^*}{=} (x|u^*(u(x))) \underset{(i)}{=} (x|u(u^*(x))) \underset{\text{définition de } u^*}{=} (u^*(x)|u^*(x)) = \|u^*(x)\|^2.$$

(iii) $\implies$ (ii) On suppose $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. Soit $(x, y) \in E^2$. En utilisant les identités de polarisation et la linéarité de u et u^* , on peut écrire

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) = \frac{1}{4} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2) \\ &\underset{(iii)}{=} \frac{1}{4} (\|u^*(x+y)\|^2 - \|u^*(x-y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u^*(x) + u^*(y)\|^2 - \|u^*(x) - u^*(y)\|^2) = (u^*(x)|u^*(y)) \end{aligned}$$

(ii) $\implies$ (i) On suppose $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.

Soit $x \in E$. On a

$$u^* \circ u(x) = u \circ u^*(x) \iff u^* \circ u(x) - u \circ u^*(x) = 0_E \iff u^* \circ u(x) - u \circ u^*(x) \in \{0_E\} = E^\perp.$$

Calculons donc, pour $y \in E$,

$$(u^* \circ u(x) - u \circ u^*(x)|y) = (u^* \circ u(x)|y) - (u \circ u^*(x)|y) \underset{\text{définition de } u^*}{=} (u(x)|u(y)) - (u^*(x)|u^*(y)) \underset{(ii)}{=} 0_{\mathbb{R}}$$

Remarque : lorsque c'est le cas, on dit que u est un **endomorphisme normal**.

**Exercice 64 : Algèbre – Caractérisation de supplémentarité du noyau et de l'image en dimension finie**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2. (a) Démontrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
(b) Démontrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
3. Si E n'est plus supposé de dimension finie, lesquelles des propriétés démontrées précédemment restent vraies? Justifier.

1. ■ Notons que sans aucune hypothèse, on a déjà $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
En effet, si $y \in \text{Im } f^2$, on a $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im } f$.
■ Supposons désormais que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ et montrons l'autre inclusion.
Soit $y \in \text{Im } f$. On a $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $x \in E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, on a $x' \in \text{Ker } f$ et $y' \in \text{Im } f$ tel que $x = x' + y'$. Alors

$$y = f(x) = \underbrace{f(x')}_{=0_E} + f(y') = f(y').$$

Mais comme $y' \in \text{Im } f$, on a $x'' \in E$ tel que $y' = f(x'')$. Ainsi, $y = f(f(x'')) = f^2(x'') \in \text{Im } f^2$.

On a donc bien $\boxed{\text{Im } f = \text{Im } f^2}$.

2. (a) ■ On a déjà vu qu'on avait toujours $\boxed{\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f}$ sans hypothèse particulière.
Vérifions qu'on a aussi $\boxed{\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2}$.
En effet, si $x \in \text{Ker } f$, $f^2(x) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \text{Ker } f^2$.
■ Comme E est de dimension finie, l'égalité de deux sous-espaces pour lesquels on a déjà une inclusion est équivalente à l'égalité de leurs dimensions.
Par ailleurs, le théorème du rang nous dit que

$$\dim \text{Im } f = \text{rg } f = n - \dim \text{Ker } f \qquad \dim \text{Im } f^2 = \text{rg } f^2 = n - \dim \text{Ker } f^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Im } f = \text{Im } f^2 &\iff \text{rg } f = \text{rg } f^2 \\ &\iff \dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2 \\ &\iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \end{aligned}$$

- (b) Supposons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. D'après la question précédente, on a aussi $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

Par théorème du rang, on a déjà $\boxed{\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f}$.

Première méthode Vérifions que $\boxed{\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}}$. L'inclusion réciproque est directe.

Prenons $y \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$: on a $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0_E$.

Donc $x \in \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ puis $y = f(x) = 0_E$.

Deuxième méthode Vérifions que $\boxed{E = \text{Im } f + \text{Ker } f}$. L'inclusion réciproque est directe.

Prenons $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im } f = \text{Im } f^2$ donc on a $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$.

Posons alors $y' = f(x') \in \text{Im } f$ et $x'' = x - y'$.

On a alors $x = x'' + y'$ avec $f(x'') = f(x) - f(y') = f(x) - f^2(x') = 0$ donc $x'' \in \text{Ker } f$ et $y' \in \text{Im } f$ et on a bien montré que $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$.

Dans tous les cas, on conclut que $\boxed{E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f}$.

3. La question 1 n'utilise pas d'hypothèse de dimension finie, le résultat est donc vrai en dimension quelconque.

On montre que la question 2 ne tient plus avec le contre-exemple $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ donc

$$f^2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{array}.$$

On a $\text{Ker } f = \mathbb{K}_0[X]$ (polynômes constants), $\boxed{\text{Ker } f^2 = \mathbb{K}_1[X] \neq \text{Ker } f}$ et pourtant $\boxed{\text{Im } f = \text{Im } f^2 = \mathbb{K}[X]}$.

Enfin, comme $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \mathbb{K}_0[X] \neq \{0\}$, $\boxed{\text{Im } f \text{ et } \text{Ker } f \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{K}[X]}$.

Exercice 65 : Algèbre – Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

2. (a) Démontrer que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

(b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$,

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A , puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

1. Posons $P = X^k$ et notons $Q = \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} X^{\ell}$. Alors, u étant linéaire,

$$(PQ)(u) = \left(\sum_{\ell=0}^n b_{\ell} X^{k+\ell} \right) (u) = \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} u^{k+\ell} = u^k \circ \left(\sum_{\ell=0}^n b_{\ell} u^{\ell} \right) = P(u) \circ Q(u).$$

Les applications linéaires $P \mapsto (PQ)(u)$ et $P \mapsto P(u) \circ Q(u)$ coïncident donc sur la base canonique de $\mathbb{K}[X]$, elles sont donc égales : $\boxed{\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)}$.

Les plus téméraires peuvent faire le calcul direct pour P et Q quelconques : $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} X^{\ell}$, toujours par linéarité de u ,

$$\begin{aligned} \boxed{(PQ)(u)} &= \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n}} a_k b_{\ell} X^{k+\ell} \right) (u) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n}} a_k b_{\ell} u^{k+\ell} \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{\ell=0}^n b_{\ell} u^k \circ u^{\ell} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^m a_k u^k \right) \circ \left(\sum_{\ell=0}^n b_{\ell} u^{\ell} \right) \\ &= \boxed{P(u) \circ Q(u)} \end{aligned}$$

2. (a) $\boxed{P(u) \circ Q(u)} = (PQ)(u) = (QP)(u) = \boxed{Q(u) \circ P(u)}$ en utilisant la question précédente et la commutativité sur $\mathbb{K}[X]$.

(b) Si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $(PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3. On a $\boxed{\chi_A = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = X^2 - X = X(X-1)}$.

Or 0 et 1 sont racines de $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ donc $\chi_A = X(X-1)$ divise R .

En outre, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est un polynôme annulateur de A .

D'après la question précédente, $\boxed{\text{c'est aussi le cas de } R}$.

**Exercice 66 : Algèbre – Caractérisation et racine carrée d'une matrice symétrique positive**

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp } A \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

1. ■ Supposons $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et donnons-nous $\lambda \in \text{Sp } A$ (le théorème spectral assure que toutes les valeurs propres de A sont réelles) et $X \neq 0$ un vecteur propre associé.
Alors $0 \leq X^T A X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$ avec $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda \geq 0$.
- Supposons $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp } A \subset \mathbb{R}^+$. Par théorème spectral, on a $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ telles que $A = P D P^{-1} = P D P^T$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$X^T A X = X^T (P D P^T) X = (P^T X)^T D (P^T X) = Y^T D Y = (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

donc $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2. Supposons $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp } A \subset \mathbb{R}^+$. Par théorème spectral, on a $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ telles que $A = P D P^{-1} = P D P^T$. Alors

$$A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^T$$

est **symétrique** grâce à la deuxième forme et **positive** grâce à la première car ses valeurs propres sont les $\lambda_i^2 \geq 0$.

3. Supposons $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, on a $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ telles que $A = P D P^{-1} = P D P^T$.

$$B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$$

est **symétrique** grâce à la deuxième forme et **positive** grâce à la première car ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$, et vérifie $B^2 = A$.

Exercice 67 : Algèbre – Diagonalisabilité dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Calculons le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M . Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -c \\ -b & \lambda & -c \\ -b & a & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -c \\ -b - \lambda & \lambda + a & 0 \\ \lambda - b & 0 & \lambda - c \end{vmatrix}$$

en effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

En développant par rapport à la dernière ligne (c'est un peu brutal, mais il n'est pas facile de faire apparaître une factorisation, ici), on obtient

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - b)c(\lambda + a) + (\lambda - c)(\lambda(\lambda + a) - a(b + \lambda)) = -abc + c(a - b)\lambda + c\lambda^2 + (\lambda - c)(\lambda^2 - ab) = \lambda^3 + (ac - bc - ab)\lambda$$

Finalement, $\chi_A = X(X^2 - (ab + bc - ac))$.

Cas où $ab + bc - ac > 0$

Dans ce cas, M possède trois valeurs propres réelles : $-\sqrt{ab + bc - ac}$, 0 , $\sqrt{ab + bc - ac}$ en dimension 3. Donc

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et, a fortiori, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Cas où $ab + bc - ac = 0$

Dans ce cas, M possède une unique valeur propre : 0 . Si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, elle est semblable à la matrice nulle, donc elle est nulle. Ainsi, dans ce cas,

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) si et seulement si $a = b = c = 0$.

Cas où $ab + bc - ac < 0$

Dans ce cas, M possède trois valeurs propres complexes : $-i\sqrt{ac - ab - bc}$, 0 , $i\sqrt{ac - ab - bc}$ en dimension 3.

Donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Elle ne l'est pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour plusieurs raisons :

- soit parce qu'elle a des valeurs propres complexes non réelles : si elle était diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cette diagonalisation serait aussi dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et les valeurs propres complexes sont les mêmes que les valeurs propres réelles ;
- soit parce que χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$;
- soit parce que 0 est sa seule valeur propre et elle n'est pas nulle (voir cas précédent) par exemple.

**Exercice 68 : Algèbre – Plusieurs méthodes de diagonalisabilité et diagonalisation**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :

- (a) sans calcul,
- (b) en déterminant le polynôme caractéristique et la dimension des sous-espaces propres,
- (c) en calculant A^2 .

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A .

Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. (a) A étant symétrique réelle, elle est (ortho)diagonalisable par théorème spectral.

(b) À l'aide des opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$ puis ($L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$), on obtient

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -1 \\ 3 - \lambda & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 3 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3)$$

donc $\text{Sp } A = \{0, 3\}$ et 3 est une valeur propre simple, donc le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

La diagonalisabilité est donc équivalente au fait que le sous-espace propre $E_0(A)$ soit de dimension 2.

On remarque que $\text{rg } A = 1$ car $0 \neq C_1 = -C_2 = C_3$ donc $\dim E_0(A) = 3 - 1 = 2$.

Ainsi, $\dim E_0(A) + \dim E_3(A) = 2 + 1 = 3$ donc A est diagonalisable.

(c) On calcule $A^2 = 3A$ donc $P = X^2 - 3X = X(X - 3)$ est un polynôme simplement scindé annulateur de A donc A est diagonalisable.

2. D'après le théorème spectral, les sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, il suffit de choisir une base orthonormale de chaque sous-espace propre. Pour $E_3(A)$, c'est facile, il suffit de normer le seul vecteur de base trouvé et on obtient $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On peut ensuite normer un premier vecteur de $E_0(A)$: $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ puis

- obtenir un vecteur (directement) orthogonal aux deux premiers (donc toujours dans $E_0(A)$) et normé en calculant $e_1 \wedge e_2 = e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. (Rappel : le produit vectoriel est au programme en Physique !)
- obtenir un deuxième vecteur de $E_0(A)$ formant une base orthonormale de $E_0(A)$ en utilisant Gram-Schmidt : on pose $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ puis $\varepsilon_3 = (-1, 0, 1) + \lambda \varepsilon_2$ avec λ tel que $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2$. On trouve $\lambda = \frac{1}{2}$ puis $\varepsilon_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ et on retrouve e_2 et e_3 en normant les vecteurs.

Exercice 69 : Algèbre – Rang et diagonalisabilité d'une matrice à paramètre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A .
2. Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable ?

1. On peut déterminer le rang de A par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

$$\operatorname{rg} A \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ a+1 & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - L_1} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1-a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \text{si } a \in \{-1, 0\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$ car, pour $a \in \{-1, 0\}$, on obtient une matrice avec une ligne ou une colonne nulle, et les deux autres indépendantes.

Remarque : on aurait aussi pu calculer $\det A = a(1+a)$ (ce que l'on retrouve avec les mêmes opérations qu'ici, les signes sortis par les deux échanges de colonnes se compensant) et calculer directement le rang de A pour $a \in \{-1, 0\}$.

2. Calculons le polynôme caractéristique de A avec les mêmes opérations. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & -a & -1 \\ \lambda - a - 1 & \lambda & -1 \\ \lambda - a - 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - L_1} \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & a - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & \lambda + a \\ 0 & \lambda + 1 & a - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & -1 & -a \\ 0 & \lambda + 1 & a - 1 \\ 0 & 0 & \lambda + a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)(\lambda + 1)(\lambda + a) \end{aligned}$$

donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + 1)(X + a)$ et $\operatorname{Sp} A = \{a + 1, -1, -a\}$. Remarquons que

$$a + 1 = -1 \iff a = -2 \qquad a + 1 = -a \iff a = -\frac{1}{2} \qquad -1 = -a \iff a = 1$$

- Si $a \notin \{1, -1/2, -2\}$, A possède trois valeurs propres distinctes en dimension 3 donc A est diagonalisable.

- Si $a = 1$, 2 est valeur propre simple et -1 est valeur propre double. Alors A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ est de dimension 2, car $\dim E_2(A) = 1$ comme 2 est valeur propre simple.

Or $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc $\dim E_{-1}(A) = 3 - \operatorname{rg}(A + I_3) = 2$ par la formule du rang.

Remarque : on aurait aussi pu trouver $\dim E_{-1}(A)$ en remarquant que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$ décrit un plan de $\mathbb{R}^3$.

Donc A est diagonalisable.

Remarque : c'est immédiat en remarquant que dans ce cas A est symétrique réelle.

- Si $a = -1/2$, -1 est valeur propre simple et $1/2$ est valeur propre double. Alors A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $E_{1/2}(A)$ est de dimension 2, car $\dim E_{-1}(A) = 1$.

Or $A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas de rang 1 car ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.

On conclut que A n'est pas diagonalisable.

- Si $a = -2$, 2 est valeur propre simple et -1 est valeur propre double. Alors A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ est de dimension 2, car $\dim E_2(A) = 1$.

Or $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas de rang 1 car ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.

On conclut comme dans le cas précédent que A n'est pas diagonalisable.

Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $a \notin \{-1/2, -2\}$.

**Exercice 70 : Algèbre - Éléments propres d'une matrice circulante**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Déduire de la question 1. les éléments propres de B .

1. Il s'agit du cas classique d'une matrice compagne (ou compagnon). C'est aussi une matrice de permutation.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On calcule le polynôme caractéristique en annulant les coefficients de la première ligne grâce à l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3$ puis un développement par rapport à la première ligne.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda^3 - 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1$$

Comme $\text{Sp } A = \mathbb{U}_3 = \{1, j, \bar{j} = j^2\}$ contient trois valeurs propres distinctes en dimension 3, A est diagonalisable.

Les sous-espaces propres sont des droites vectorielles, il suffit donc de connaître un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres pour les connaître tous.

Or on remarque en en faisant la somme des colonnes que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme, de plus, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $A - jI_3 = \begin{pmatrix} -j & 0 & 1 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 1 & -j \end{pmatrix}$. On remarque que, dans cette matrice, $C_1 + \bar{j}C_2 + jC_3 = C_1 + j^2C_2 + jC_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - j^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_j(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \end{pmatrix}$. On aurait aussi pu résoudre

$$\begin{pmatrix} -j & 0 & 1 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -jx + z = 0 \\ x - jy = 0 \\ y - jz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = jx \\ x = j^3x = x \\ y = j^2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \bar{j}x \\ z = jx \end{cases}.$$

Comme A est réelle, $E_{\bar{j}}(A)$ est le conjugué de $E_j(A)$, donc $E_{\bar{j}}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ \bar{j} \end{pmatrix}$.

2. Notons $Q = a + bX + cX^3$, donc $B = Q(A)$.

Par la question 1, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j \\ 1 & j & j \end{pmatrix}$. Alors $B = Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(j) & 0 \\ 0 & 0 & Q(\bar{j}) \end{pmatrix} P^{-1}$.

On a déjà $\text{Sp } B = \{Q(1), Q(j), Q(\bar{j})\} = Q(\mathbb{U}_3)$.

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_j = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \end{pmatrix}$ et $C_{\bar{j}} = \overline{C_j}$ les colonnes de P (et vecteurs propres de A associés à chacune de ses valeurs propres.)

- Si $Q(1) = Q(j) = Q(\bar{j})$, $\text{Sp } B = \{a + b + c\}$ et $E_{a+b+c}(B) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.
- Si $Q(1), Q(j), Q(\bar{j})$ sont deux à deux disjoints, $\forall \lambda \in \mathbb{U}_3, E_{Q(\lambda)}(B) = \text{Vect } C_\lambda = E_\lambda(A)$.
- Si $Q(1) = Q(j) \neq Q(\bar{j})$, $\text{Sp } B = \{Q(1), Q(\bar{j})\}$ et $E_{Q(1)} = \text{Vect}(C_1, C_j) = E_1(A) \oplus E_j(A)$ et $E_{Q(\bar{j})} = \text{Vect } C_{\bar{j}} = E_{\bar{j}}(A)$.
Les cas suivants sont similaires (ne pas les détailler à l'oral) :
- Si $Q(1) \neq Q(j) = Q(\bar{j})$, $\text{Sp } B = \{Q(1), Q(j)\}$ et $E_{Q(1)} = \text{Vect } C_1 = E_1(A)$ et $E_{Q(j)} = \text{Vect}(C_j, C_{\bar{j}}) = E_j(A) \oplus E_{\bar{j}}(A)$.
- Si $Q(1) = Q(\bar{j}) \neq Q(j)$, $\text{Sp } B = \{Q(1), Q(j)\}$ et $E_{Q(1)} = \text{Vect}(C_1, C_{\bar{j}}) = E_1(A) \oplus E_{\bar{j}}(A)$ et $E_{Q(j)} = \text{Vect } C_j = E_j(A)$.

Exercice 71 : Algèbre – Étude d’une projection vectorielle

Soit P le plan d’équation $x + y + z = 0$ et D la droite d’équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

1. Une première solution consiste à remarquer que $3 = \dim \mathbb{R}^3 = 2 + 1 = \dim P + \dim D$ et $P \cap D = \{(0, 0, 0)\}$ car $D = \text{Vect}(1, 2, 3)$ est engendrée par $(1, 2, 3) \notin P$.

Mais une autre manière de procéder consiste à raisonner par analyse synthèse, ce qui aura la vertu de nous donner la décomposition explicitement, utile pour la suite.

Analyse

Si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose comme somme d’un vecteur de P et d’un vecteur de D , on a $(x', y', z') \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = \underbrace{(x', y', z')}_{\in P} + \underbrace{\lambda(1, 2, 3)}_{\in D}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x' + \lambda = x \\ y' + 2\lambda = y \\ z' + 3\lambda = z \end{cases} \quad \text{et } x' + y' + z' = 0.$$

En remplaçant, on obtient $(x - \lambda) + (y - 2\lambda) + (z - 3\lambda) = 0$, donc

$$\lambda = \frac{x + y + z}{6}, \text{ puis } (x', y', z') = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$$

d’où l’unicité sous réserve d’existence.

Synthèse

Réciproquement, on vérifie que $\frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z) \in P$, $\frac{x + y + z}{6}(1, 2, 3) \in D$ et $(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z) + \frac{x + y + z}{6}(1, 2, 3)$, ce qui assure l’existence de la décomposition.

On a donc bien $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. D’après le calcul précédent, $p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$.

On a donc comme matrice de p dans la base canonique $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Il suffit classiquement de choisir une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = \text{Ker}(p - \text{id}) \oplus \text{Ker } p$ pour obtenir une matrice de p diagonale.

On a déjà vu que D est engendrée par $(1, 2, 3)$. Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires de P pour la compléter.

Ainsi, par exemple, $((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 2, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 72 : Algèbre – Diagonalisabilité d'un endomorphisme de rang ≤ 1**

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .

2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

1. Comme e est une base de E , $\text{rg } f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(v)$, donc $\text{rg } f = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq 0_E \\ 0 & \text{si } v = 0_E \end{cases}$.

2. ■ Si $v = 0_E$, alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est diagonalisable.

■ Si $v \neq 0_E$, comme $\text{rg } f = 1 = n - \dim \text{Ker } f$, 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$.

Alors f est diagonalisable si et seulement si f admet une autre valeur propre, nécessairement simple.

Notons que le fait que 0 soit racine de χ_f d'ordre au moins $n - 1$ assure que ce polynôme est scindé.

On peut alors s'intéresser à la trace de f , égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité dans ce cas.

Pour cela, on représente f dans la base e et on obtient une matrice dont toutes les colonnes contiennent

les coordonnées de v dans e . Notons-les $(v_1, \dots, v_n)$. Alors $\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \dots & v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\text{tr } f = \sum_{i=1}^n v_i$.

Finalement, si $v \neq 0$, f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } f = \sum_{i=1}^n v_i \neq 0$.

En effet,

★ si c'est le cas, on a $\text{tr } f = \sum_{i=1}^n v_i$ qui est valeur propre de f , nécessairement simple et 0 valeur propre d'ordre nécessairement $n - 1$, donc f est diagonalisable.

★ Et si ce n'est pas le cas, 0 est la seule valeur propre, et comme $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, f ne peut être diagonalisable.

Exercice 73 : Algèbre – Diagonalisation et commutant d'une matrice 2×2

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

1. On a directement le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$.
Donc $\text{Sp } A = \{-2, 3\}$. Comme il y a deux valeurs propres distinctes en dimension 2, A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites.

Or $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) = \text{Ker}(A + 2I_2)$ et comme ce vecteur n'est pas nul,

$$E_{-2}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Et $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3(A) = \text{Ker}(A - 3I_2)$ et comme ce vecteur n'est pas nul,

$$E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. On peut déterminer directement les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ en calculant

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -2c & -2d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & -2b \\ 3c & -2d \end{pmatrix} \text{ (il est utile de rappeler que multiplier à gauche, respectivement à droite, par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes, respectivement les colonnes, par les coefficients diagonaux correspondants.)}$$

Donc les matrices commutent donc si et seulement si $b = c = 0$ et ainsi

$$\text{l'ensemble des matrices commutant avec } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ est } \mathcal{D}_2(\mathbb{K}).$$

Un autre point de vue, sans calcul mais plus élaboré, consiste à remarquer que si une matrice commute avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors les sous-espaces propres de celle-ci, c'est-à-dire $\mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont stables par la première, ce qui revient à dire qu'elle est diagonale, la réciproque étant immédiate.

Soit P telle que $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$: par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

On en déduit que l'espace vectoriel $\text{Com } A$ des matrices qui commutent avec A est $\{PDP^{-1}, D \in \mathcal{D}_2(\mathbb{K})\}$. En effet,

$$MA = AM \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}AP = P^{-1}AP \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \iff P^{-1}AP \in \mathcal{D}_2(\mathbb{K}).$$

Comme $\dim \mathcal{D}_2(\mathbb{K}) = 2$ et comme $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\dim \text{Com } A = 2$.

Enfin, I_2 et A commutent avec A et ne sont pas colinéaires, donc $\text{Vect}(I_2, A)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Com } A$ de dimension 2.

Finalement, $\text{Com } A = \text{Vect}(I_2, A)$.

**Exercice 74 : Algèbre – Système différentiel 2×2 et diagonalisation**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

1. (a) A étant symétrique et à coefficients réels, le théorème spectral assure son (ortho-)diagonalisabilité.

(b) **Première méthode** On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en faisant la somme de la première et de la dernière colonne de A et que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en analysant la deuxième colonne de A .

Donc 3 est valeur propre, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé et 1 est valeur propre, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

La dernière valeur propre s'obtient en calculant la trace de A qui est égale à la somme des valeurs propres car χ_A est scindé puisque A est diagonalisable. Comme la trace vaut 3, la dernière valeur propre est -1 .

Comme $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on remarque que $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 .

Deuxième méthode Le polynôme caractéristique de A se calcule facilement par développement par rapport à sa deuxième ligne :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = +(\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - 2^2) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Donc A possède 3 valeurs propres distinctes en dimension 3 (ce qui redonne la diagonalisabilité : $-1, 1$ et 3).

Comme $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on remarque que $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 .

Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on remarque que $C_1 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

Troisième méthode Après avoir calculé le polynôme caractéristique et obtenu les valeurs propres, on peut obtenir des vecteurs propres en résolvant des système linéaires.

On trouve $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 .

Puis $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = z = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Enfin, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

Ainsi, $\text{Sp } A = \{-1, 1, 3\}$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres associés

La diagonalisabilité de A ou le fait que les sous-espaces propres soient toujours en somme directe assurent l'indépendance linéaire de ces vecteurs.

2. Le système différentiel se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On diagonalise $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Première méthode : directement, par changement de fonctions inconnues On

a

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X. \text{ On pose } Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Comme l'application $C \mapsto P^{-1}C$ est linéaire sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a Y dérivable et $Y' = P^{-1}X'$.
On résout alors

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 3y_3 \end{cases} \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1 : t \mapsto \alpha e^{-t} \\ y_2 : t \mapsto \beta e^t \\ y_3 : t \mapsto \gamma e^{3t} \end{cases}$$

Il reste à voir que $X = PY$ donc $\begin{cases} x = y_1 + y_3 \\ y = y_2 \\ z = -y_1 + y_3 \end{cases}$ donc les solutions du système différentiel sont les fonctions

$$\begin{cases} x : t \mapsto \alpha e^{-t} + \gamma e^{3t} \\ y : t \mapsto \beta e^t \\ z : t \mapsto -\alpha e^{-t} + \gamma e^{3t} \end{cases} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Deuxième méthode : avec des exponentielles de matrices Comme le système est à coefficients constants, le cours nous dit que les solutions sont les fonctions sous la forme

$$t \mapsto \exp(tA)X_0$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or $A = PDP^{-1}$, donc

$$\exp(tA) = \exp(tPDP^{-1}) = P \exp(tD) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Les solutions du système différentiel sont donc sous la forme

$$t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0 = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^t \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Finalement, vu les colonnes de P , les solutions sont les fonctions

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : t \mapsto \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui redonne bien

$$\begin{cases} x : t \mapsto \alpha e^{-t} + \gamma e^{3t} \\ y : t \mapsto \beta e^t \\ z : t \mapsto -\alpha e^{-t} + \gamma e^{3t} \end{cases} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 75 : Algèbre – Système différentiel 3×3 et trigonalisation**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a, b et c .

3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ donc 1 est la seule valeur propre de A . Or $A \neq P \times I_2 \times P^{-1} = I_2$ donc A n'est pas diagonalisable.

2. Dans une matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, les coefficients diagonaux sont nécessairement les valeurs propres, donc on va trouver $a = c = 1$.

Le premier vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^2$ doit être un vecteur propre de f associé à son unique valeur propre 1.

Or $A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On voit que $2C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A et

$v_1 = (2, -1)$ convient.

Pour le vecteur v_2 , il n'y a pas de contrainte autre que le fait que (v_1, v_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$. On peut par exemple choisir $v_2 = (1, 0)$ qui n'est pas colinéaire à v_1 .

On a alors, par construction, $f(v_1) = v_1$ (vecteur propre associé à la valeur propre 1) et en utilisant la matrice A , $f(v_2) = (-1, 1)$ (première colonne de A), qu'il faut exprimer dans la nouvelle base (v_1, v_2) . On remarque que $(-1, 1) = -(2, -1) + (1, 0) = -v_1 + v_2$.

Donc, par définition, $\text{Mat}_{(v_1, v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Le système différentiel se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

On trigonalise $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Première méthode : directement, par changement de fonctions inconnues

On a $X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X$. On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Comme l'application $C \mapsto P^{-1}C$ est linéaire sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a Y dérivable et $Y' = P^{-1}X'$.

On résout alors

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, y_1'(t) = y_1(t) - \beta e^t \\ y_2 : t \mapsto \beta e^t \end{cases}$$

Pour résoudre la première équation différentielle, on a besoin d'une solution particulière, les solutions de l'équation homogène associée étant les $t \mapsto \alpha e^t$.

- Comme le second membre est de la forme $-\beta e^t$ avec 1 racine simple de l'équation caractéristique $r - 1 = 0$ de $y_1' - y_1 = 0$, on peut chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto Cte^t$ avec $C \in \mathbb{K}$. En réinjectant dans l'équation, on trouve $C = -\beta$, d'où la solution particulière $y_0 : t \mapsto -\beta te^t$.
- Sinon, on peut utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière de la forme $y_0 : t \mapsto \lambda(t)e^t$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}$.

On obtient y_0 solution si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)e^t = -\beta e^t$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = -\beta$ et on peut choisir $\lambda : t \mapsto -\beta t$ ce qui conduit à la solution particulière $y_0 : t \mapsto -\beta te^t$.

- Une dernière méthode donnant directement y_1 consiste à voir que

$$y_1'(t) = y_1(t) - \beta e^t \iff y_1'(t)e^{-t} - y_1(t)e^{-t} = -\beta$$

et à reconnaître dans le membre de gauche la dérivée d'un produit (méthode du facteur intégrant). Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_1'(t) = y_1(t) - \beta e^t \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, y_1(t)e^{-t} = -\beta t + \alpha \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, y_1(t) = \alpha e^t - \beta t e^t$$

Finalement,

$$X' = AX \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1 : t \mapsto \alpha e^t - \beta t e^t \\ y_2 : t \mapsto \beta e^t \end{cases}$$

Il reste à voir que $X = PY$ donc $\begin{cases} x = 2y_1 + y_2 \\ y = -y_1 \end{cases}$ donc les solutions du système différentiel sont les fonctions

$$\begin{cases} x : t \mapsto (2\alpha + \beta)e^t - 2\beta t e^t \\ y : t \mapsto -\alpha e^t + \beta t e^t \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3.$$

Deuxième méthode : avec des exponentielles de matrices

Comme le système est à coefficients constants, le cours nous dit que les solutions sont les fonctions sous la forme

$$t \mapsto \exp(tA)X_0$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Or $A = PTP^{-1}$, donc

$$\exp(tA) = \exp(tPTP^{-1}) = P \exp(tT)P^{-1}$$

Mais $T = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente. C'est aussi le cas de tN et, comme tI_2 et tN commutent,

$$\exp(tT) = \exp(tI_2) \exp(tN) = e^t I_2 (I_2 + tN) = \begin{pmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système différentiel sont donc sous la forme

$$t \mapsto P \begin{pmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} X_0 = P \begin{pmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha e^t - \beta t e^t \\ \beta e^t \end{pmatrix}$$

où $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Finalement, vu les colonnes de P , les solutions sont les fonctions

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : t \mapsto (\alpha e^t - \beta t e^t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui redonne bien

$$\begin{cases} x : t \mapsto (2\alpha + \beta)e^t - 2\beta t e^t \\ y : t \mapsto -\alpha e^t + \beta t e^t \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 76 : Algèbre – Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

1. (a) On montre que pour tout $(x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ ie $(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$.

Soit λ un nombre réel. On pose $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y) = \|x + \lambda y\|^2$: on a que $P(\lambda) \geq 0$ par positivité. Or, par bilinéarité (ou identité remarquable sur la norme)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) \\ &= (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

P est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

Cas 1 Si $\|y\|^2 = (y|y) = 0$, alors on doit avoir, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x|x) + 2\lambda(x|y) \geq 0$, ce qui n'est possible que si $(x|y) = 0$ (en effet, cela se voit en faisant tendre $\lambda \rightarrow \pm\infty$ si $(x|y) \neq 0$ ce qui aboutit à une contradiction ou en reconnaissant une équation de droite dont les ordonnées seraient toutes positive, elle est donc horizontale et de coefficient directeur nul) et l'inégalité est vraie. Cette preuve a l'avantage d'être valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive.

On peut aussi plus simplement utiliser la défini-positivité du produit scalaire : $y = 0_E$ et donc l'inégalité s'écrit $0 = 0$.

Cas 2 Sinon, le polynôme en λ est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leq 0$$

et on obtient l'inégalité recherchée.

Si on n'est pas familier avec le discriminant réduit, on peut utiliser le discriminant classique

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0.$$

- (b) Il y a égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

En effet

- Si $y = 0_E$, il y a égalité.
- Si $y \neq 0_E$, il y a égalité si et seulement si $P(\lambda)$ admet une racine (double) si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, (x + \lambda y | x + \lambda y) = 0$, ce qui équivaut à $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda y = 0$ et donc x et y sont liés.

2. $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, si $f \in E, \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b 1 dt \right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt$$

donc $(b-a)^2$ est un minorant de $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$, atteint pour $f \equiv 1$, donc $m = (b-a)^2$ (qui est même un minimum en plus d'une borne inférieure.)

Exercice 77 : Algèbre – Propriétés de l'orthogonal en dimension finie

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

1. Si $x \in A^\perp$ et $a \in A$, alors $(x|a) = 0$, donc $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Comme A et $A^\perp$ sont de dimension finie, $A \oplus A^\perp = E$ et $A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp = E$ donc

$$\dim (A^\perp)^\perp = \dim E - \dim A^\perp = \dim A$$

Finalement, $(A^\perp)^\perp = A$.

2. (a) ■ Comme $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a déjà $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
 ■ Si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, $y \in F$ et $z \in G$, alors

$$\underbrace{(x|}_{\in F^\perp \cap G^\perp} \underbrace{y+z)}_{\in F+G} = \underbrace{(x|y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{(x|z)}_{\in G^\perp} = 0$$

donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

- Finalement, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Remarque : Cette égalité et cette démonstration sont encore valables en dimension infinie.

- (b) En appliquant la question précédente à $F^\perp$ et $G^\perp$ et en utilisant la première question,

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G$$

donc, en prenant l'orthogonal et en réutilisant la première question, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Remarque : Une seule inclusion reste vraie en dimension infinie.

**Exercice 78 : Algèbre – Propriétés du groupe orthogonal**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 (a) Démontrer que $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
 Prouver que $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

1. (a) Si u est une isométrie vectorielle, alors pour tout vecteurs x et y de E ,

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (\text{car } u \text{ conserve la norme}) \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

- (b) Comme E est de dimension finie, il suffit de vérifier que u est injectif pour obtenir automatiquement que u est bijectif. Or

$$x \in \text{Ker } u \iff u(x) = 0_e \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0_E$$

car u conserve la norme, ce qui donne $\text{Ker } u = \{0_E\}$ donc u injectif, donc u bijectif.

2. On montre que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

- D'après la question précédente, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$.
- $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car id_E est un endomorphisme qui conserve la norme.
- Soit $u, v \in \mathcal{O}(E)$. Alors $u \circ v^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $x \in E$,

$$\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|u(v^{-1}(x))\| \underset{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|v^{-1}(x)\| \underset{v \in \mathcal{O}(E)}{=} \|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|$$

donc $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

3. ■ Supposons $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la conservation du produit scalaire donnée en 1.a permet d'écrire

$$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

donc la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est orthonormale donc libre et contient $n = \dim E$ vecteurs : c'est une base orthonormée de E .

- Supposons que la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Alors, pour tout $x \in E$, en décomposant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donc $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$, comme $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E ,

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E ,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Donc $\|u(x)\| = \|x\|$ et on a bien $u \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 79 : Algèbre – Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Supposons $\int_a^b h(x)dx = 0$. Soit H une primitive de la fonction continue h . Alors $H' = h \geq 0$ donc H est croissante et $H(b) - H(a) = \int_a^b h(x)dx = 0$ donc H est constante sur $[a, b] : \forall x \in [a, b], H(a) \leq H(x) \leq H(b) = H(a)$. Alors, sur $[a, b], h = H' \equiv 0$.

Donc $\boxed{\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0.}$

2. **Bonne définition** Si $f, g \in E$, le réel $(f|g)$ est bien défini.

Symétrie Si $f, g \in E, (f|g) = (g|f)$ par commutativité du produit réel.

Bilinéarité Si $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}, (f_1 + \lambda f_2|g) = (f_1|g) + \lambda(f_2|g)$ par linéarité de l'intégrale, ce qui donne la linéarité à gauche. La linéarité à droite en découle par symétrie.

Défini-positivité

- Si $f \in E, (f|f) \geq 0$ par positivité de l'intégrale ;
- et si $(f|f) = 0$, alors, comme f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a, b]$, elle y est nulle et donc $f = 0_E$.

Donc $\boxed{(\cdot | \cdot)}$ est un produit scalaire sur E .

3. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, en notant $f = \sqrt{\cdot}$ et $g : x \mapsto e^{-x}$ fonctions continues sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = (f|g) \leq \|f\| \|g\| = \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x}dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{\sqrt{2}}$$

donc $\boxed{\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \leq \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}.}$

**Exercice 80 : Algèbre – Produit scalaire fonctionnel et projection orthogonale**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

1. **Bonne définition** Si $f, g \in E$, elles sont continues sur $[0, 2\pi]$ et le réel $(f|g)$ est bien défini.

Symétrie Si $f, g \in E$, $(f|g) = (g|f)$ par commutativité du produit réel.

Bilinéarité Si $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f_1 + \lambda f_2|g) = (f_1|g) + \lambda(f_2|g)$ par linéarité de l'intégrale, ce qui donne la linéarité à gauche. La linéarité à droite en découle par symétrie.

Défini-positivité

- Si $f \in E$, $(f|f) \geq 0$ par positivité de l'intégrale ;
- et si $(f|f) = 0$, alors, comme f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, elle y est nulle et donc, par 2π -périodicité, $f = 0_E$.

2. $F = \text{Vect}(f : x \mapsto \cos x, g : x \mapsto \cos(2x))$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie donc le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$ est bien défini.

Il s'agit de l'unique fonction $h \in F$ telle que $u - h \in F^\perp$.

Or, par une célèbre formule de trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \text{ie} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\text{donc } u = \underbrace{-\frac{g}{2}}_{\in F} + \frac{1}{2}.$$

Vérifions alors que la fonction constante $\frac{1}{2}$ est dans $F^\perp$.

$$\left(\frac{1}{2} \middle| f\right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{4\pi} \left[\sin t \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \middle| g\right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{Donc } u = \underbrace{-\frac{g}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in F^\perp} \quad \text{et} \quad \boxed{p_F(u) = h = -\frac{g}{2}}.$$

Exercice 81 : Algèbre – Produit scalaire matriciel et distance à un sous-espace

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$, où $\text{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A' . On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

On a classiquement $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. $\mathcal{F} = \text{Vect}\left(I_2, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme K n'est pas une matrice scalaire, la famille libre et génératrice (I_2, K) en est une base.

2. Comme $\mathcal{F}$ est un sous-espace de dimension 2 (I_2 et K sont non colinéaires) en dimension 4, $\mathcal{F}^\perp$ est aussi de dimension 2.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^\perp$ si et seulement si $\varphi(A, I_2) = \varphi(A, K) = 0$ si et seulement si $a + d = 0 = b - c$.

Donc $\mathcal{F}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et comme M et N ne sont pas colinéaires, $\left(M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Comme $J = I_2 + N$ avec $I_2 \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{F}^\perp$, $p_{\mathcal{F}^\perp}(J) = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. D'après le cours (et le théorème de Pythagore), $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|p_{\mathcal{F}^\perp}(J)\| = \|N\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2}$ donc $d(J, \mathcal{F}) = \sqrt{2}$.

**Exercice 82 : Algèbre – Produit scalaire matriciel et distance à un sous-espace**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

1. Remarque : On sait bien que $(A|A') = \text{tr}(A^T A')$!

Bonne définition Si $A, A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le réel $(A|A')$ est bien défini sans problème.

Symétrie Si $A, A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A|A') = (A'|A)$ par commutativité du produit réel.

Bilinéarité Si $A_1, A_2, A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(A_1 + \lambda A_2|A') = (A_1|A') + \lambda(A_2|A')$ en remplaçant directement dans l'expression (ou en utilisant l'expression avec la trace et la transposée). D'où la linéarité à gauche, la linéarité à droite en découle par symétrie.

Défini-positivité

- Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$;
- et si $(A|A) = 0$, alors, comme il s'agit d'une somme nulle de termes réels positifs, $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0$ et donc $A = 0_2$.

2. On écrit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp$ car elle est orthogonale à toute matrice triangulaire supérieure.

Alors
$$d(A, F) = \left\| A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

Exercice 83 : Algèbre – Valeurs propres d'une composée

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

Remarque : la notation « $\int_1^X P$ » désigne le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_1^x P$.

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

Indication : penser à utiliser le déterminant.

1. On suppose que $\lambda \neq 0$ et que λ est valeur propre de $u \circ v$. On a donc $x \neq 0_E$ tel que $u(v(x)) = \lambda x$. Alors

$$v \circ u(v(x)) = \lambda v(x).$$

Or $v(x) \neq 0_E$, sinon on aurait $0_E = u(v(x)) = \lambda x$ alors que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $x \neq 0_E$.

On a donc bien λ valeur propre de $v \circ u$.

2. La notation est très mauvaise, mais on comprend que $u(P)$ désigne l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ nul en 1 dont la dérivée vaut P . On a donc

$$u \circ v : P \mapsto P - P(1) \quad \text{et} \quad v \circ u = \text{id}_{\mathbb{R}[X]} : P \mapsto P.$$

Alors $\text{Ker } v \circ u = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ et $\text{Ker } u \circ v = \mathbb{R}_0[X]$ ensemble des polynômes constants.

Donc 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.

Le résultat de la première question n'est pas valable pour $\lambda = 0$ sur un espace de dimension infinie.

3. Supposons E de dimension finie. Alors

$$0 \in \text{Sp } u \circ v \iff u \circ v \notin \mathcal{GL}(E) \iff 0 = \det u \circ v = \det u \det v = \det v \circ u \iff v \circ u \notin \mathcal{GL}(E) \iff 0 \in \text{Sp } v \circ u.$$

Le résultat de la première question est valable pour $\lambda = 0$ sur un espace de dimension finie.

**Exercice 84 : Algèbre – Racines n^{e} de l'unité**

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

1. Un argument d'un nombre complexe non nul z est un réel θ tel que $z = |z| e^{i\theta}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Désignons un nombre complexe z sous sa forme trigonométrique $z = r e^{i\theta}$ où $r = |z| \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\begin{aligned}
 z^n = 1 &\iff r^n e^{in\theta} = 1 e^{i0} \\
 &\iff \begin{cases} |z^n| = |r^n| &= 1 \\ e^{in\theta} &= e^{i0} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} r^n &= 1 \quad (\text{car } r^n \geq 0) \\ n\theta &\equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} = 1 \quad (\text{car } r \geq 0) \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}.
 \end{aligned}$$

Remarquons que, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ sont deux à deux distincts car $\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$ et $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est injective sur $[0, 2\pi[$.

Comme le polynôme $X^n - 1$ de degré n ne saurait avoir plus de racines que son degré, on les a toutes. Et donc l'équation $z^n = 1$ possède exactement n solutions qui forment l'ensemble

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On remarque que i n'est pas solution de $(z + i)^n = (z - i)^n$. Alors

$$\begin{aligned}
 (z + i)^n = (z - i)^n &\iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^n = 1 \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z + i}{z - i} = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z + i = e^{i \frac{2k\pi}{n}} (z - i) \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left(e^{i \frac{2k\pi}{n}} - 1 \right) z = i \left(e^{i \frac{2k\pi}{n}} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

Or, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $e^{i \frac{2k\pi}{n}} = 1 \iff k = 0$. Dans ce cas-là, l'équation devient $0 = 2i$ donc ne fournit pas de solution.

Par ailleurs, on réécrit

$$e^{i \frac{2k\pi}{n}} + 1 = e^{i \frac{k\pi}{n}} \left(e^{i \frac{k\pi}{n}} + e^{-i \frac{k\pi}{n}} \right) = 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) e^{i \frac{k\pi}{n}}$$

et, de même,

$$e^{i \frac{2k\pi}{n}} - 1 = e^{i \frac{k\pi}{n}} \left(e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}} \right) = 2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) e^{i \frac{k\pi}{n}}.$$

Il vient

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = \frac{\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right)}{\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)} = \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right).$$

ce qui définit $n - 1$ solutions de l'équation, toutes réelles, distinctes par injectivité de $\cotan$ sur $]0, \pi[$.

Remarque : $(X + i)^n - (X - i)^n$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n - 1$.

Exercice 85 : Algèbre – Formule de Taylor polynomiale et caractérisation de la multiplicité d'une racine

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

1. (a) Comme P est de degré au plus n ,
$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

(b) Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a donc, avec la question précédente,

$$P^{(r)}(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$$

si et seulement si

$$P = (X - a)^r Q \quad \text{où} \quad Q = \sum_{k=r}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-r} \quad \text{et} \quad Q(a) = P^{(r)}(a) \neq 0$$

Si c'est le cas, a est racine de P d'ordre r .

Si, réciproquement, a est racine de P d'ordre r , alors P s'écrit $P = (X - a)^r Q$ avec $Q(a) \neq 0$, et les coefficients de Q dans la base $((X - a)^i)_{i \in \llbracket 0, n-r \rrbracket}$ sont nécessairement, par unicité, les $\frac{P^{(i+r)}(a)}{(i+r)!}$, donc

$$Q = \sum_{i=0}^{n-r} \frac{P^{(i+r)}(a)}{(i+r)!} (X - a)^i = \sum_{k=r}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-r}.$$

D'après ce qui précède, on a alors bien $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2. 1 est racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ si et seulement si $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$.

$$\text{Or } P(1) = a + b + 1, P'(1) = 5 + 2a + b \text{ et } P''(1) = 20 + 2a. \text{ On cherche donc } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} a + b = -1 & (1) \\ 2a + b = -5 & (2) \\ a \neq -10 \end{cases}$$

On trouve $a = -4 \neq -10$ et $b = 3$ par exemple avec $(2) - (1)$ et $2 \times (1) - (2)$.

On factorise alors P par $X(X - 1)^2$: $P = X(X^4 - 4X + 3) = X(X - 1)(X^3 + X^2 + X - 3) = X(X - 1)^2(X^2 + 2X + 3)$ qui est bien une forme irréductible car $X^2 + 2X + 3 = (X + 1)^2 + 2$ n'a pas de racine réelle.

**Exercice 86 : Algèbre – Petit théorème de Fermat**

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

(a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Indication : procéder par récurrence.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n , que p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

1. Supposons $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.

On a alors des entiers de Bézout $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + av = 1 = pu' + bv'$. En multipliant, on obtient

$$1 = (pu + av)(pu' + bv') = p \times (puu' + buv' + au'v) + ab \times (vv')$$

donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.

2. (a) Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Alors $\binom{p}{k} k! = p(p-1) \cdots (p-k+1)$ est divisible par p .

Or p est premier avec chacun des entiers entre 1 et $k < p$ car aucun de ces entiers n'est divisible par le nombre premier p , donc, avec la question précédente, p est premier avec leur produit $k!$, et le lemme

de Gauß nous dit que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : n^p \equiv n \pmod{p}$.

Initialisation On a bien $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$ car $p \geq 2$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^p \equiv n \pmod{p}$. Alors

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1 \equiv n^p + 1 \pmod{p}$$

car, d'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on arrive bien à $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$, ce qui établit la récurrence.

(c) Soit n entier naturel non divisible par p premier, donc tel que $n \wedge p = 1$.

D'après la question précédente, $n^p \equiv n \pmod{p}$ donc p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.

Comme $n \wedge p = 1$, par lemme de Gauß, p divise $n^{p-1} - 1$, donc $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 87 : Algèbre – Interpolation de Lagrange

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

1. Le plus simple est d'introduire le morphisme

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

qui est bien linéaire par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, entre deux espaces vectoriels de même dimension finie valant $n+1$.

Sa bijectivité est alors équivalente à son injectivité.

Or $P \in \text{Ker } \Phi \iff a_0, \dots, a_n$ sont $n+1$ racines deux à deux distinctes du polynôme P de degré au plus $n \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ainsi, Φ est injectif, donc $\boxed{\Phi \text{ est bijectif}}$, ce qui répond à la question.

Autre méthode : le déterminant de Φ dans les bases canoniques est le déterminant de Vandermonde de $(a_0, \dots, a_n)$, non nul car les a_i sont deux à deux distincts. Ce qui prouve la bijectivité de Φ .

Une autre manière de le formuler est d'écrire $P = c_0 + c_1 X + \dots + c_n X^n$ et de traduire les conditions sur P par le système de Vandermonde

$$\begin{cases} c_0 + a_0 c_1 + \dots + a_0^n c_n = b_0 \\ \vdots \\ c_0 + a_n c_1 + \dots + a_n^n c_n = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(c_0, \dots, c_n)$. Comme les a_i sont deux à deux distincts, ce système a bien une unique solution.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Classiquement, $L_k = \frac{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (X - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_j)}$ qui est bien de degré $n \leq n$ et qui prend bien la

valeur b_j en chaque a_j , qui convient donc par unicité.

En cas de trou de mémoire, voir que les a_j pour $j \neq k$ en sont n racines distinctes. Comme L_k doit être de degré au plus n , il s'écrit $L_k = \lambda \prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (X - a_j)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et le fait que $L_k(a_k) = 1$ redonne

$$\lambda = \frac{1}{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_j)}.$$

3. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors les polynômes $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$ et X^p sont de degré au plus n et valent, en chaque a_k , tous les deux a_k^p .

Par unicité, on a donc $\boxed{\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p}$.

**Exercice 88 : Algèbre – Polynôme annulateur et valeurs propres**

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$.

(a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .

(b) u est-il diagonalisable ?

Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

1. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit λ une valeur propre de u , $x \neq 0_E$ vecteur propre associé. Alors

$$0_E = P(u)(x) = \sum_{k=0}^n a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n a_k (\lambda^k x) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) x = P(\lambda)x.$$

Comme $x \neq 0$, $P(\lambda) = 0$.

Remarque : $u(x) = \lambda x \implies \forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$ se prouve facilement par récurrence.

2. (a) Soit $M \in E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $P = (X - 1)^2$, donc $P(u) = (u - \text{id})^2$ et $v = u - \text{id} : M \mapsto \text{tr}(M)A$, donc

$$P(u)(M) = v^2(M) = v(v(M)) = \text{tr}(\text{tr}(M)A)A = \text{tr}(M)\text{tr}(A)A = 0_n$$

car $\text{tr} A = 0$. Ainsi $P = X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .

(b) ■ D'après les deux questions précédentes, la seule valeur propre possible de u est 1.

Si u était diagonalisable, on aurait alors $E = E_1(u) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ donc $u = \text{id}_E$. On peut aussi le voir en représentant u matriciellement : $B = P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P I_{n^2} P^{-1} = I_{n^2}$.

Ce n'est pas le cas par exemple parce que $u(I_n) = I_n + nA \neq I_n$.

■ On peut aussi s'intéresser au polynôme minimal de u : il divise $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ et n'est pas constant, il vaut donc $X - 1$ ou $(X - 1)^2$.

Mais comme $u \neq \text{id}_E$, il ne peut valoir $X - 1$.

Donc $\pi_u = (X - 1)^2$ n'est pas simplement scindé et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 89 : Algèbre – Racines de l'unité et calcul de somme

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On factorise

$$\left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right)^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Or $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ donc $2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$.

Ainsi, le module de $z^k - 1$ vaut $2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$ en est un argument.

2. On calcule

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) = 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{\pi}{n}}\right)^k \right) \\ &= 2 \operatorname{Im} \left(\frac{1 - \left(e^{i \frac{\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} \right) = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{2}{e^{i \frac{\pi}{2n}} (e^{-i \frac{\pi}{2n}} - e^{i \frac{\pi}{2n}})} \right) = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{2e^{-i \frac{\pi}{2n}}}{-2i \sin \frac{\pi}{2n}} \right), \end{aligned}$$

calcul rendu licite par le fait que $0 < \frac{\pi}{n} < \pi$ donc $e^{i \frac{\pi}{n}} \neq 1$.

On termine la simplification

$$S = 2 \frac{\operatorname{Im} \left(i e^{-i \frac{\pi}{2n}} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2 \frac{\operatorname{Im} \left(i \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n} \right) \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

donc $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

**Exercice 90 : Algèbre – Interpolation de Lagrange** $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

4. Application : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

1. Φ est bien linéaire par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ pour tout $a \in \mathbb{K}$, entre deux espaces vectoriels de même dimension finie valant 3.

Sa bijectivité est alors équivalente à son injectivité.

Or $P \in \text{Ker } \Phi$ si et seulement si a_1, a_2, a_3 sont 3 racines deux à deux distinctes du polynôme P de degré au plus 2 si et seulement si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ainsi, Φ est injectif, donc Φ est bijectif, ce qui répond à la question.

Autre méthode : le déterminant de Φ dans les bases canoniques est le déterminant de Vandermonde de (a_1, a_2, a_3) , valant $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$, non nul car les a_i sont deux à deux distincts. Ce qui prouve la bijectivité de Φ .

Une autre manière de le formuler est d'écrire $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$ et de traduire la condition sur $\Phi(P) = (b_1, b_2, b_3)$ par le système de Vandermonde

$$\begin{cases} c_0 + a_1c_1 + a_1^2c_2 = b_1 \\ c_0 + a_2c_1 + a_2^2c_2 = b_2 \\ c_0 + a_3c_1 + a_3^2c_2 = b_3 \end{cases}$$

d'inconnue (c_0, c_1, c_2) . Comme les a_i sont deux à deux distincts, ce système a bien une unique solution, ce qui correspond à la bijectivité de Φ .

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) (L_1, L_2, L_3) est l'image par l'isomorphisme Φ^{-1} de la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{K}^3$,

il s'agit donc d'une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) On a classiquement $L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

Ce sont en effet des polynômes de degré au plus 2 dont les images par Φ sont respectivement $(1, 0, 0) = e_1, (0, 1, 0) = e_2$ et $(0, 0, 1) = e_3$.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.

- P est l'unique polynôme de degré au plus 2 prenant comme valeurs $P(a_1), P(a_2)$ et $P(a_3)$ en a_1, a_2 et a_3 , donc $P = \Phi^{-1}(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = P(a_1)\Phi^{-1}(e_1) + P(a_2)\Phi^{-1}(e_2) + P(a_3)\Phi^{-1}(e_3)$. On a donc

$$P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3.$$

- On aurait pu voir que ce dernier polynôme est de degré au plus 2, prend comme valeurs $P(a_1), P(a_2)$ et $P(a_3)$ en a_1, a_2 et a_3 , et conclure par l'injectivité de Φ (unicité).
- On aurait pu décomposer $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$ et trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en évaluant en a_1, a_2 et a_3 .

4. On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1, P(1) = 3$ et $P(2) = 1$. D'après ce qui précède,

$$P = 1 \cdot \frac{(X - 1)(X - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} + 3 \cdot \frac{X(X - 2)}{1 \cdot (1 - 2)} + 1 \cdot \frac{X(X - 1)}{2 \cdot (2 - 1)} = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 2) - 3(X^2 - 2X) + \frac{1}{2}(X^2 - X) = 1 + 4X - 2X^2$$

Exercice 91 : Algèbre – Polynôme minimal et calcul de puissance

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

1. On remarque que la somme des colonnes de A est égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on devine que la seule valeur propre va être 1.

On peut répéter cette opération dans le calcul de χ_A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ \lambda - 1 & \lambda - 3 & 1 \\ \lambda - 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

en ayant ensuite retranché la première ligne aux deux autres.

On en déduit que $\chi_A = (X - 1)^3$ et $\text{Sp } A = \{1\}$.

On peut aussi conclure en remarquant que $A^2 = 2A - I_3$ et que les valeurs propres sont alors racines de $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

2. Comme $0 \notin \text{Sp } A$, A est inversible.

Si elle était diagonalisable, elle serait égale à $PI_3P^{-1} = I_3$ donc elle n'est pas diagonalisable.

3. Si on a déjà vu dans la première question que $(X - 1)^2$ est un polynôme annulateur, on dit que π_A est un polynôme unitaire non constant divisant $(X - 1)^2$ et qu'il ne peut valoir $X - 1$ car $A \neq I_3$ ce qui permet de conclure $\pi_A = (X - 1)^2$.

Sinon, on utilise le théorème de Cayley-Hamilton : χ_A annule A donc est divisible par π_A qui peut alors valoir $X - 1$, $(X - 1)^2$ ou $(X - 1)^3$. On élimine $X - 1$ car $A \neq I_3$ et on calcule $(A - I_3)^2 = 0_3$ ce qui permet de conclure que $\pi_A = (X - 1)^2$.

4. Par division euclidienne, $X^n = (X - 1)^2 Q + R$ où $\deg R < 2$ donc $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

En évaluant en 1, on tire $1^n = 1 = R(1) = a + b$.

En dérivant puis évaluant en 1 - 1 est racine double de $(X - 1)^2$ - on obtient $n1^{n-1} = R'(1) = a$.

Donc $a = n$, $b = 1 - n$ et $R = nX + (1 - n)$.

En évaluant la division euclidienne en A , on tire $A^n = \pi_A(A)Q(A) + R(A) = R(A) = nA + (1 - n)I_3$.



Exercice 92 : Algèbre – Produit scalaire matriciel et supplémentarité orthogonale des matrices symétriques et antisymétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .

Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .

On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

(a) Sans utiliser les dimensions de $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$, prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer $F^\perp$.

1. On peut soit utiliser les propriétés de la trace sur la première forme $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$, soit écrire une deuxième forme

$$\langle A, B \rangle = \sum_{j=1}^n [A^T B]_{j,j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n [A^T]_{j,i} b_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$$

et rédiger comme avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Bonne définition Quelle que soit la forme de $\langle A, B \rangle$, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\langle A, B \rangle$ est bien défini sans problème.

Symétrie Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ par commutativité du produit réel avec la deuxième forme. Avec la première forme, on peut écrire

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle.$$

Bilinéarité Si $A, B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec la première forme, la linéarité à droite découle de celle de la trace :

$$\langle A, B + \lambda B' \rangle = \text{tr}(A^T (B + \lambda B')) = \text{tr}(A^T B) + \lambda \text{tr}(A^T B') = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, B' \rangle.$$

Avec la seconde forme,

$$\langle A, B + \lambda B' \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} (b_{i,j} + \lambda b'_{i,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} + \lambda \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b'_{i,j} = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, B' \rangle.$$

Ensuite, comme toujours, la linéarité à gauche en découle par symétrie.

Défini-positivité Cette fois, difficile de se passer de la seconde forme. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\blacksquare \quad \langle A, A \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \geq 0;$$

$\blacksquare$ et si $\langle A, A \rangle = 0$, alors, comme il s'agit d'une somme nulle de termes réels positifs, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}^2 = 0$ et donc $A = O_n$.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. (a) Remarquons que le résultat découle de la question suivante (car $A_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie) mais ce n'est pas la logique de l'énoncé.

Le plus rapide pour obtenir cette supplémentarité classique est d'utiliser une symétrie.

$T : M \mapsto M^T$ est involutive ($T \circ T = \text{id}_E$) et linéaire : il s'agit donc d'une symétrie sur $\text{Ker}(T - \text{id}_E) = S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\text{Ker}(T + \text{id}_E) = A_n(\mathbb{R})$. On a donc $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : On peut aussi raisonner par analyse-synthèse pour trouver explicitement l'unique décomposition d'une matrice en partie symétrique et partie antisymétrique, ou alors utiliser un argument de dimension et le fait que l'intersection soit réduite à la matrice nulle, mais c'est (un peu) plus long et moins élégant. De plus, notre argument justifie aussi le fait qu'on ait des sev même si c'est admis par l'énoncé.

(b) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Alors $\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA)$ d'une part, et, d'autre part

$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA) = -\langle S, A \rangle$$

donc $\langle S, A \rangle = 0$ et, par suite, $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.

On conclut avec les dimensions : $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim E - \dim A_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$ par la question précédente et la supplémentarité de $A_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})^\perp$.

Donc $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

3. En utilisant une base de F constituée de matrices élémentaires et la deuxième forme,

$$M \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle M, E_{i,i} \rangle = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = 0$$

Donc $F^\perp$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale nulle.

Exercice 93 : Algèbre – Polynôme annulateur d'endomorphisme

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E .

1. Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
(b) En déduire que $\text{Im } u = \text{Ker } (u^2 + u + \text{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. La formule du rang donne déjà $\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim E$.
Prenons $y \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u$. Alors on a $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = u^2(x) = 0_E$, donc $u^3(x) = u(u^2(x)) = 0_E$.
Ainsi, $0_E = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = u(x) = y$.
Donc $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0_E\}$.
Finalement, $\boxed{\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E}$.

2. (a) Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors

$$\boxed{\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)}.$$

- (b) On remarque que $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ avec $X \wedge (X^2 + X + 1) = 1$.
Donc, par le lemme de décomposition des noyaux, $E = \text{Ker } (u^3 + u^2 + u) = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } (u^2 + u + \text{Id})$.
En passant aux dimensions, $\dim \text{Ker } (u^2 + u + \text{Id}) = \dim E - \dim \text{Ker } u = \dim \text{Im } u$.
Il reste à montrer une inclusion pour conclure.
Or, si $y \in \text{Im } u$, on a $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et alors

$$(u^2 + u + \text{Id})(u(x)) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0_E$$

$$\text{donc } x \in \text{Ker } (u^2 + u + \text{Id})$$

$$\text{donc } \text{Im } u \subset \text{Ker } (u^2 + u + \text{Id}) \text{ et ils sont de même dimension : } \boxed{\text{ils sont égaux.}}$$

3. Comme u est non bijectif, $0 \in \text{Sp } u$.

On sait par ailleurs que les valeurs propres sont parmi les racines réelles – $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ici – du polynôme annulateur

$$X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1).$$

Mais $(X^2 + X + 1)$ n'a pas de racine réelle. Donc $\boxed{\text{Sp}(u) = \{0\}}$.

Remarque : on a aussi $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \subset \{0, j, \bar{j}\}$.

**Exercice 94 : Algèbre – Théorème des restes chinois**

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 5 & [6] \\ x \equiv 4 & [8] \end{cases}$ n'a pas de solution appartenant à $\mathbb{Z}$.

2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

- (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.

Prouver que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 5 & [16] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

- (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

- (b) Dédire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

1. Soit x un entier tel que $x \equiv 5 \pmod{6}$ et $x \equiv 4 \pmod{8}$.

On a alors $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 5 + 6k = 4 + 8\ell$ ce qui imposerait que x soit à la fois pair et impair. C'est absurde.

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 5 & [6] \\ x \equiv 4 & [8] \end{cases} \text{ n'a pas de solution appartenant à } \mathbb{Z}.$$

2. (a) Des entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

- (b) On a déjà que $ab|c \implies a|c$ et $b|c$ par définition de la divisibilité (et sans utiliser l'hypothèse de primalité relative de a et b .)

Réciproquement, supposons que $a|c$ et $b|c$. Donnons-nous deux entiers de Bézout u et v tels que $au + bv = 1$. Alors

$$c = acu + cbv$$

avec $b|c$ donc $ab|acu$ et $a|c$ donc $ab|cbv$, et, finalement, $ab|c$.

On a montré $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$ et c'est encore valable pour $c \in \mathbb{Z}$.

3. (a) On « remarque » que $x_0 = -11$ est solution particulière.

- (b)

$$(S) \iff \begin{cases} x \equiv -11 & [17] \\ x \equiv -11 & [16] \\ x \equiv -11 & [15] \end{cases}$$

$$\iff x + 11 \text{ est simultanément divisible par } 15, 16 \text{ et } 17$$

avec 15, 16 et 17 deux à deux premiers entre eux. Par une extension de la question 2. à trois entiers (ou une double utilisation de cette question en remarquant qu'on a aussi $(15 \times 16) \wedge 17 = 1$ pour la deuxième), on en déduit que

$$(S) \iff 15 \times 16 \times 17 = 4080 \text{ divise } x + 11.$$

Les solutions sont donc les $x \equiv -11 \pmod{4080}$.

Remarque : le théorème des restes chinois du cours permet directement d'écrire $(S) \iff x \equiv -11 \pmod{4080}$ connaissant -11 solution particulière et car 15, 16, 17 sont deux à deux premiers entre eux. On nous demande de le redémontrer ici.



PROBABILITÉS – EXERCICES 95 À 112

Exercice 95 : Probabilités – Tirages avec remises et espérance de gain

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

(a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément 5 boules dans l'urne.

(a) Déterminer la loi de X .

(b) Déterminer la loi de Y .

1. (a) Il s'agit d'une répétition d'expériences de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours,

$$X \sim \mathcal{B}(5, p), \mathbb{E}(X) = 5p = 1 \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{4}{5}.$$

- (b) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. Donc $Y(\Omega) = \{5k - 15, k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$ et, si $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} \frac{4^{5-k}}{5^5}.$$

De plus, par linéarité, $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = -10$ et $\mathbb{V}(Y) = 5^2\mathbb{V}(X) = 20$.

2. (a) $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et en prenant comme modèle $\Omega = \mathcal{P}_5(\mathcal{B})$ (parties à 5 éléments) où $\mathcal{B}$ est l'ensemble des boules, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ uniforme, avec $|\Omega| = \binom{10}{5} = \frac{10!}{(5!)^2}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$:

- $(X = 0)$ est le cas où il n'y a que des boules noires (5 parmi 8) donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5! \cdot 8!}{3! \cdot 10!} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \frac{2}{9}$$

- $(X = 1)$ est le cas où il n'y a qu'une seule boule blanche parmi 2 et 4 boules noires parmi 8 donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2 \cdot \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \cdot (5!)^2 \cdot 8!}{(4!)^2 \cdot 10!} = \frac{2 \cdot 25}{9 \cdot 10} = \frac{5}{9}$$

- $(X = 2)$ est le cas où il n'y a les deux boules blanches, il n'y a donc à choisir que 3 boules noires parmi 8 donc

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{9}$$

ou alors $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$.

- (b) On a toujours $Y = 5X - 15$. Donc $Y(\Omega) = \{-15, -10, -5\}$ et

$$\mathbb{P}(Y = -15) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(Y = -10) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{9}$$

$$\mathbb{P}(Y = -5) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{9}$$

**Exercice 96 : Probabilités – Fonction génératrice d'une somme**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = p_n$. La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $] -1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X .
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in] -1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
(a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
(b) en exprimant la fonction génératrice sous forme d'une espérance.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in] -1, 1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n .

1. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ converge (vers 1), le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n t^n$ est au moins égal à 1, donc $] -1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X .
2. (a) Les séries entières ayant toutes un rayon de convergence au moins égal à 1, on peut effectuer un produit de Cauchy (de rayon de convergence au moins égal à 1 aussi) et écrire, pour $t \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k) \right) t^n & (S = n) = \bigsqcup_{k=0}^n (X_1 = k, X_2 = n - k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n - k) \right) t^n & \text{par indépendance} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n) t^n \right) & \text{par produit de Cauchy de séries entières} \\ &= G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \end{aligned}$$

(b) Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, c'est aussi le cas, pour $t \in] -1, 1[$, de t^{X_1} et t^{X_2} . On a donc

$$G_S(t) = \mathbb{E}[t^S] = \mathbb{E}[t^{X_1} t^{X_2}] = \mathbb{E}[t^{X_1}] \mathbb{E}[t^{X_2}] = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t).$$

3. Soit, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i la variable aléatoire du numéro de la boule tirée au i^{e} tirage.

Alors les X_i sont des v.a. de fonction génératrice $t \mapsto \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$.

D'après ce qui précède, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est de fonction génératrice

$$G_{S_n} = (G_{X_i})^n : t \mapsto \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 \right)^n = \frac{(1 + 2t + t^2)^n}{4^n} = \frac{(1 + t)^{2n}}{4^n}.$$

Par la formule du binôme de Newton, $G_{S_n} : t \mapsto \sum_{k=0}^{2n} \frac{\binom{2n}{k}}{4^n} t^k$.

Donc $S_n(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\binom{2n}{k}}{4^n} = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-k} : S_n \sim \mathcal{B} \left(2n, \frac{1}{2} \right).$

Exercice 97 : Probabilités – Couple de variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e j! k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
2. Prouver que $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$ existe et la calculer.

1. D'après l'énoncé, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. Par application de la formule des probabilités totales au système complet d'événements $((Y = k))_{k \in \mathbb{N}}$, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)}{e j! k! 2^{j+k}} \\ &= \frac{1}{e j! 2^j} \left(j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! 2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)! 2^k} \right) \\ &= \frac{1}{e j! 2^j} \left(j + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k!} \\ &= \frac{2j+1}{e j! 2^{j+1}} e^{1/2} \\ &= \frac{2j+1}{\sqrt{e} j! 2^{j+1}} \end{aligned}$$

en reconnaissant des séries exponentielles donc convergentes et en déarrant l'indice de la deuxième somme à 1 pour ne pas écrire de factorielle de nombre strictement négatif, le terme pour $k = 0$ étant nul.

Ainsi, par symétrie des rôles, $\forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \mathbb{P}(X = j) = \frac{2j+1}{\sqrt{e} j! 2^{j+1}}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{2k+1}{\sqrt{e} k! 2^{k+1}}$.

On remarque que $\mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2. L'espérance $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$ de la variable aléatoire 2^{X+Y} réelle positive existe toujours dans $[0, +\infty]$.

Montrons qu'elle est finie et calculons sa valeur.

Par la formule de transfert puis symétrie des rôles, dans $[0, +\infty]$,

$$\mathbb{E}[2^{X+Y}] = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) 2^{j+k} = \frac{1}{e} \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{j+k}{j! k!} = \frac{1}{e} \left(\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{j! k!} + \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{k}{j! k!} \right) = \frac{2}{e} \sum_{j \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{j! k!}$$

Par théorème sur les sommes doubles produits dans le cas positif,

$$\mathbb{E}[2^{X+Y}] = \frac{2}{e} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) = \frac{2}{e} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) = 2e < +\infty$$

Donc 2^{X+Y} est d'espérance finie égale à $2e$.

**Exercice 98 : Probabilités – Autour de la loi binomiale**

Un standardiste effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p (où $p \in]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.

2. Le standardiste rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

(a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$.

(b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.

(c) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

1. Il s'agit d'une répétition de n expériences de Bernoulli de même paramètre p indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

2. (a) En supposant l'événement $(X = i)$ réalisé, on se retrouve de nouveau dans une situation de nombre de succès de $n - i$ expériences de Bernoulli de même paramètre p indépendantes. Donc, pour la probabilité conditionnelle $P_{(X=i)}$, Y suit une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}$ (qui est nul si $k > n - i$).

(b) Z correspondant au nombre total de correspondant ayant répondu, $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X = i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ associé à X ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Z = k \mid X = i) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i \mid X = i) \quad \text{On a } 0 \leq X \leq k \text{ et } Y = Z - X. \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-k} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-i-k} \quad \text{Formule admise.} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \cdot 1^{k-i} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k \quad \text{Binôme de Newton.} \\ &= \binom{n}{k} (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k} \end{aligned}$$

avec $p(2-p) + (1-p)^2 = 1$. Donc $Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

(c) D'après le cours, $\mathbb{E}(Z) = np(2-p)$ et $\mathbb{V}(Z) = np(2-p)(1-p)^2$.

Remarque : pour prouver la formule admise imaginons devoir choisir dans une ville de n habitants, k conseillers municipaux et, parmi ces conseillers, i adjoints.

- On peut choisir d'abord les k conseillers parmi n habitants de $\binom{n}{k}$ manières différentes puis i adjoints parmi les k conseillers de $\binom{k}{i}$ manières différentes ce qui laisse au total $\binom{k}{i} \binom{n}{k}$ choix possibles.
- On peut aussi choisir d'abord les i adjoints parmi n habitants de $\binom{n}{i}$ manières différentes puis $k - i$ autres conseillers parmi les $n - i$ habitants restant de $\binom{n-i}{k-i}$ manières différentes ce qui laisse au total $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i}$ choix possibles.

On a compté deux fois la même chose, d'où la formule.

Exercice 99 : Probabilités – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grand nombres

1. Rappeler, en précisant les hypothèses, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \in L^2$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que

$$\forall a \in]0, +\infty[, \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1) \right| \geq a \right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3. Application

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^{e} tirage.

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \in L^2$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $a > 0$.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire, en notant m l'espérance de X et σ son écart-type,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

2. Loi faible des grands nombres

On remarque que, comme les Y_n sont identiquement distribuées,

- par linéarité, $\mathbb{E} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \mathbb{E}(Y_1)$;
- par indépendance, $V \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{V(Y_1)}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1) \right| \geq a \right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3. Application

On considère la suite (Y_n) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_n mesure l'issue du n^{e} tirage : $Y_n(\omega) = 1$ si la n^{e} boule tirée est rouge, 0 sinon. Ainsi, dans notre contexte, $Y_n \sim \mathcal{B} \left(\frac{2}{5} \right)$ et les Y_n sont indépendantes car les tirages le sont, $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{5} = 0,4$ et $V(Y_n) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

On cherche n tel que $\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - 0,4 \right| \geq 0,05 \right) \leq 0,05$.

D'après la question précédente, il suffit de choisir n tel que $\frac{6/25}{n \cdot 0,05^2} \leq 0,05$ c'est-à-dire

$$n \geq \frac{6/25}{(1/20)^3} = 6 \cdot 4^2 \cdot 20 = 1920.$$

**Exercice 100 : Probabilités – Variable aléatoire et fraction rationnelle**

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ .
3. Prouver que X admet une espérance finie, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

1. Par la méthode habituelle, on trouve $R(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ avec $a = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2}$,
 $b = \frac{1}{(-1)(-1+2)} = -1$ et $c = \frac{1}{(-2)(-2+1)} = \frac{1}{2}$.

2. On cherche λ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} = 1$. Or, par télescopage,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) - 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc $\lambda = 4$.

3. Comme X est à valeurs réelles positives, elle admet une espérance dans $[0, +\infty]$. On va montrer qu'elle est finie et la calculer.

Dans $[0, +\infty]$, on calcule par décomposition en éléments simples et télescopage

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n(n+1)(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 4 \left(\frac{1}{1+1} - 0 \right) < +\infty$$

Donc X est d'espérance finie égale à 2.

4. On cherche à savoir si $X \in L^2$ c'est-à-dire, par théorème de transfert, si $(\mathbb{P}(X = n)n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable c'est-à-dire si la série de terme général $\mathbb{P}(X = n)n^2 = \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente.

Or $0 \leq \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{4}{n}$ est un terme général de série divergente, donc X n'admet pas de variance.

Exercice 101 : Probabilités – Chaîne de Markov

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A , B et C .

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son n^{e} trajet».

On note B_n l'événement «l'animal est en B après son n^{e} trajet».

On note C_n l'événement «l'animal est en C après son n^{e} trajet».

On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
- (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
 - (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
 - (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .
Remarque : aucune expression finalisée de a_n , b_n et c_n n'est demandée.

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

donc $a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

(b) De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est (ortho)diagonalisable par théorème spectral.
- (b) $\text{rg}(A + \frac{1}{2}I_3) = \text{rg}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$, donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et $\dim E_{-1/2}(A) = 2$.

Comme dans cette matrice, les colonnes vérifient $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1/2}(A)$ et ils sont indépendants donc $E_{-1/2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Remarque : On peut aussi résoudre le système $(A - \frac{1}{2}I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y$.

- (c) Puisque $-\frac{1}{2}$ est valeur propre double de A et $\text{tr}(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre simple de A . Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$.

On aurait aussi pu voir directement sur A que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui donne directement la valeur propre 1 et un vecteur propre associé.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base diagonalisante de A : on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \text{ et on a alors } D = P^{-1}AP.$$

3. D'après la question 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et donc, par récurrence (suite géométrique),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 102 : Probabilités – Loi du minimum de vaid géométriques**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$,

$Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.

(b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En interprétant X_i comme loi d'un premier succès dans la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p ce qui ne nuit pas à la généralité car, les probabilités demandées ne dépendant que de la loi de X_i , l'événement $(X_i > n)$ correspond à avoir n échecs sur les n premières répétitions donc

$$\mathbb{P}(X_i > n) = q^n \text{ et } \mathbb{P}(X_i \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X_i > n) = 1 - q^n.$$

Notons que les résultats restent valables pour $n = 0$.

Cela se retrouve par le calcul :

$$\mathbb{P}(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=1}^n pq^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 - q^n$$

puis $\mathbb{P}(X_i > n) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq n) = q^n$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance et avec la question précédente,

$$\mathbb{P}(Y > n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^N (X_i > n)\right) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(X_i > n) = q^{nN}.$$

Donc $\mathbb{P}(Y \leq n) = 1 - \mathbb{P}(Y > n) = 1 - q^{nN}$, puis

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y > n-1) - \mathbb{P}(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N} (1 - q^N).$$

(Calcul encore valable si $n = 1$.)

(b) Avec $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on reconnaît $Y \sim \mathcal{G}(1 - q^N)$.

D'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - q^N}$.

Exercice 103 : Probabilités – Somme de lois de Poisson**Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.****Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.**

1. (a) Soit
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$
- .

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.**On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .****Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.**

- (b) En déduire l'espérance et la variance de
- $X_1 + X_2$
- .

2. Soit
- $p \in]0, 1[$
- . Soit
- $\lambda \in]0, +\infty[$
- .

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.**On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .****On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .****Déterminer la loi de X .**

1. (a) On a
- $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$
- et pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k) \stackrel{X_1 \perp X_2}{=} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n - k) \\
 &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton. Donc $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- (b) D'après le cours,
- $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$
- (ce qui se retrouve par linéarité de l'espérance et indépendance, respectivement.)

2. On a déjà
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- . Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- .

En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((Y = m))_{m \in \mathbb{N}}$ associé à Y ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n \mid Y = m) \cdot \mathbb{P}(Y = m) \\
 &= \sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} && \text{probabilité nulle si } n > m \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-n}}{(m-n)!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} && \text{série exponentielle} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{\lambda(1-p)} \\
 &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

**Exercice 104 : Probabilités – Boules et compartiments**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
(b) Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Interpréter ce résultat.

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

2. Première méthode

(a) On modélise l'expérience avec $\Omega = \{1, 2, 3\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ probabilité uniforme.

Alors $(X = 2) = \{(1, \dots, 1), (2, \dots, 2), (3, \dots, 3)\}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{|(X = 2)|}{|\Omega|} = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Alors $(X = 1)$ contient tous les n -uplets composés d'exactly 2 valeurs. Il y a

- 3 choix possibles pour la valeur qui n'apparaît pas,
- puis $2^n - 2$ choix possibles pour toutes les composantes : 2 pour chacune mais il faut enlever les 2 cas où il n'y aurait qu'une seule des deux valeurs, comptée dans le cas $(X = 2)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{|(X = 1)|}{|\Omega|} = \frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$.

Deuxième méthode

(a) Notons, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_i la variable aléatoire du numéro du compartiment dans lequel se trouve la boule numéro i . Les B_i sont des v.a. de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(B_1 = 1, \dots, B_n = 1) + \mathbb{P}(B_1 = 2, \dots, B_n = 2) + \mathbb{P}(B_1 = 3, \dots, B_n = 3) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i = 1) + \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i = 2) + \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i = 3) \quad \text{indépendance} \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{le 3 correspond aussi au choix du compartiment non vide} \end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Pour le cas $(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2)$, il y a trois choix possibles pour le compartiment restant vide. On peut faire une disjonction de cas suivant le nombre $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ de boules allant dans le compartiment non vide de numéro minimal. Le compartiment vide étant fixé, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles des boules dans le premier compartiment non vide. Ainsi

$$\mathbb{P}(X = 1) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\binom{n}{k}}_{1^{\text{er}} \text{ compart.}} \underbrace{\left(\frac{1}{3} \right)^k}_{2^{\text{e}} \text{ compart.}} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k} = \frac{1}{3^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 2 \right)$$

donc $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$.

3. (a) $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

(b) et donc $\mathbb{E}(X) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Lorsque le nombre de boules devient très grand, en moyenne, aucun compartiment ne restera vide.

Exercice 105 : Probabilités – Formule de Bayes et dés pipés

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

- (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.
On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.
On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
- (c) Déterminer la limite de (p_n) . Interpréter ce résultat.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Si B est un événement non négligeable et si $(A_i)_{i \in I}$ (où I est fini ou dénombrable) est un système complet ou quasi-complet d'événements non négligeables, on a

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(B | A_k) \mathbb{P}(A_k)}.$$

Preuve : Soit $i \in I$.

$$\mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(B | A_k) \mathbb{P}(A_k)}$$

en appliquant au dénominateur la formule des probabilités totales avec le système complet ou quasi-complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$.

2. (a) Notons T l'événement « le dé choisi est pipé » et A l'événement « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».

On demande de calculer $\mathbb{P}(T | A)$.

Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements non négligeables, avec $\mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $\mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4}$. Alors, d'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(T | A) = \frac{\mathbb{P}(A | T) \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A | T) \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A | \bar{T}) \mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

donc $\mathbb{P}(T | A) = \frac{1}{2}.$

- (b) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au k^{e} lancer » et on pose $B = \bigcap_{k=1}^n A_k$.

On cherche à calculer $p_n = \mathbb{P}(T | B)$.

Toujours avec le système complet d'événements $(T, \bar{T})$, d'après la formule de Bayes,

$$p_n = \mathbb{P}(T | B) = \frac{\mathbb{P}(B | T) \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(B | T) \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(B | \bar{T}) \mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$

- (c) Donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$ Cela signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de très fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

**Exercice 106 : Probabilités – Loi conjointe du maximum et du minimum de variables géométriques indépendantes**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Elles suivent la même loi définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .

2. Déterminer la loi marginale de U .

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.

3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V .

4. U et V sont-elles indépendantes ?

1. On a $(U, V)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq j \leq i\}$.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq j < i$. Alors

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = \mathbb{P}(U = i, V = j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) + \mathbb{P}(X = j, Y = i)$$

par disjonction de cas, le fait que $i \neq j$ assure que ces cas sont bien disjoints.

Par indépendance, symétrie des rôles et définition des lois de X et Y ,

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = 2(pq^i)(pq^j) = 2p^2q^{i+j}$$

Lorsque $i = j$,

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, i)) = \mathbb{P}(X = i, Y = i) = (pq^i)^2 = p^2q^{2i}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = \begin{cases} 2p^2q^{i+j} & \text{si } 0 \leq j < i; \\ p^2q^{2i} & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On a $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et, si $i \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((V = j))_{j \in \mathbb{N}}$ associé à V ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U = i, V = j) = \sum_{j=0}^{i-1} 2p^2q^{i+j} + p^2q^{2i} \\ &= 2p^2q^i \sum_{j=0}^{i-1} q^j + p^2q^{2i} \\ &= 2p^2q^i \frac{1 - q^i}{1 - q} + p^2q^{2i} \\ &= 2pq^i (1 - q^i) + p^2q^{2i} \\ &= (2 - 2q^i + pq^i) pq^i \\ &= (2 - 2q^i + (1 - q)q^i) pq^i \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(U = i) = (2 - 2q^i + pq^i) pq^i = pq^i (2 - q^i - q^{i+1}).$$

3. On a $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(W = n) = \mathbb{P}(V = n - 1) = pq^{2(n-1)}(1 + q) = (q^2)^{n-1}(1 - q)(1 + q) = (1 - (1 - q^2))^{n-1}(1 - q^2)$$

$$\text{donc } W \sim \mathcal{G}(1 - q^2). \text{ D'après le cours, } \mathbb{E}(W) = \frac{1}{1 - q^2} = \mathbb{E}(V) + 1 \text{ et donc } \mathbb{E}(V) = \frac{q^2}{1 - q^2}.$$

4. $\mathbb{P}((U, V) = (0, 1)) = 0 \neq \mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = 1)$ donc $U \not\perp V$.

Exercice 107 : Probabilités – Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

- L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
- L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n^{e} tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

1. Notons A l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne U_1 ».
Alors $\bar{A}$ est l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne U_2 ».
 $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B_1 | \bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

On a donc $\boxed{p_1 = \frac{17}{35}}.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(B_n, \bar{B}_n)$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | \bar{B}_n)\mathbb{P}(\bar{B}_n) = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n).$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}}.$

3. Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On cherche une solution particulière constante

$$c = -\frac{6}{35}c + \frac{4}{7} \iff c = \frac{20}{41}.$$

Les solutions de l'équation homogène associée $u_{n+1} = -\frac{6}{35}u_n$ sont les suites géométriques de raison $-\frac{6}{35}$.

On a donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \lambda \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}}.$

Remarque : si on ne reconnaît pas une équation linéaire (ou plutôt affine), on peut poser $(u_n)_n = (p_n - c)_n$ et vérifier que c'est une suite géométrique.

Or $p_1 = \frac{17}{35} = -\frac{6\lambda}{35} + \frac{20}{41}$ donc $\boxed{\lambda = \frac{20}{41} - \frac{17}{35}}$ Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \left(\frac{20}{41} - \frac{17}{35}\right) \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}}.$

**Exercice 108 : Probabilités – Loi conjointe de variables géométrique et de Poisson indépendantes**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$.

- Déterminer les lois de X et de Y .
- (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et si $i \in \mathbb{N}$, comme $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à Y), par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

en reconnaissant une série exponentielle. Donc $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$.

De même, pour $j \in \mathbb{N}$, comme $((X = i))_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à X), par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{e j!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

en reconnaissant une série géométrique. Donc $\mathbb{P}(Y = j) = e^{-1} \frac{1^j}{j!} : Y \sim \mathcal{P}(1)$.

2. (a) On a bien $(1 + X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(1 + X = n) = \mathbb{P}(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2}$ donc

$$1 + X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1 + X) - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(1 + X) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$ donc $\mathbb{V}(X) = 2$.

(b) D'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y) = 1$.

3. Avec les résultats précédents, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ donc $X \perp Y$.

4. $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{n+1} n!} = \frac{1}{2e} e^{1/2}$ en reconnaissant de nouveau une série exponentielle, donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

Exercice 109 : Probabilités – Lois de première occurrence dans un tirage sans remise

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

- Déterminer la loi de X .
- Déterminer la loi de Y .

1. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ car il n'y a que deux boules noires. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des $n+2$ boules.

Première méthode On peut n'observer que les deux premiers tirages pour conclure. L'univers $\Omega = \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$ est l'ensemble des 2-arrangements (couples de 2 éléments distincts) des $n+2$ boules, de cardinal $(n+2)(n+1)$, la tribu est toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité est toujours uniforme.

- $\mathbb{P}(X=1) = \frac{|\{X=1\}|}{|\Omega|} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n}{n+2}$ car dans un couple de $(X=1)$, il faut placer l'une des n boules blanches, l'une des $n+1$ autres boules ensuite.
- $\mathbb{P}(X=2) = \frac{|\{X=2\}|}{|\Omega|} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}$ car dans un couple de $(X=2)$, il faut placer l'une des 2 boules noires, puis l'une des n boules blanches.
- $\mathbb{P}(X=3) = \frac{|\{X=3\}|}{|\Omega|} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ car dans un couple de $(X=3)$, il faut placer l'une des 2 boules noires d'abord puis la deuxième (pour laquelle il n'y a plus de choix).

Deuxième méthode On note B_j l'événement « Tirer une boule blanche au j^{e} tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, (on tire respectivement 0, 1 ou 2 noires puis une blanche)

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{n}{n+2} \quad \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(B_2 | \overline{B_1}) = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2} | \overline{B_1}) = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Troisième méthode On observe tout le tirage : $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$ de cardinal $(n+2)!$, un tirage est une permutation des $n+2$ boules. La tribu est $\mathcal{P}(\Omega)$ (univers au plus dénombrable) et la probabilité est uniforme vu la description de l'expérience.

- Une permutation de $(X=1)$ est une permutation commençant par une des n boules blanches, puis permutant les $n+1$ autres ensuite. On trouve $|\{X=1\}| = n(n+1)!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=1)$.
- Une permutation de $(X=2)$ est une permutation commençant par une des 2 boules noires, puis une des n boules blanches, puis permutant les n autres ensuite. On trouve $|\{X=2\}| = 2 \cdot n \cdot n!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=2)$.
- Une permutation de $(X=3)$ permute d'abord les 2 boules noires, puis permute les n boules blanches. On trouve $|\{X=3\}| = 2! \cdot n!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=3)$.

Vérification On calcule $\sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(X=k) = 1$. On peut aussi toujours déduire l'une des probabilités des autres.

2. On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ car au mieux on a une boule $n^{\circ} 1$ au premier tirage, au pire, les deux boules $n^{\circ} 1$ sont tirées à la fin.

Première méthode On peut n'observer que les positions des boules $n^{\circ} 1$, sans ordre. L'univers est l'ensemble $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)$ des paires d'indices, de cardinal $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, la tribu est toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité est toujours uniforme. Dans une paire de $(Y=k)$, on a k et un autre entier entre $k+1$ et $n+2$.

$$\text{On obtient } \mathbb{P}(Y=k) = \frac{n+2 - (k+1) + 1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$$

Deuxième méthode On note A_j l'événement « Tirer une boule qui ne porte pas le $n^{\circ} 1$ au j^{e} tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, en regardant l'état de l'urne à chaque tirage,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{j=1}^{k-2} \mathbb{P}\left(A_{j+1} \mid \bigcap_{i=1}^j A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{A_k} \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) \\ &= \prod_{j=0}^{k-2} \frac{n-j}{n+2-j} \cdot \frac{2}{n+3-k} = 2 \cdot \frac{n!}{(n+1-k)!} \cdot \frac{(n+2-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$



Troisième méthode On peut reprendre l'univers $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ d'observation de tous les tirages. Pour décrire une permutation de $(Y = k)$, il faut choisir d'abord $k-1$ des n boules ne portant pas le $n^\circ 1$, les permuter, puis une des 2 boules $n^\circ 1$ puis permuter les $n+2-k$ boules restantes.

$$\text{On obtient } \boxed{\mathbb{P}(Y = k)} = \frac{\binom{n}{k-1} (k-1)! \cdot 2 \cdot (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2n!(n+2-k)!}{(n-k+1)!(n+2)!} = \boxed{\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}.$$

Vérification On calcule $\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y = k) = 1$ avec le changement d'indice $j = n+2-k$.

Exercice 110 : Probabilités – Fonctions génératrices et somme de variables de Poisson indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On considère la série entière $\sum t^n \mathbb{P}(X = n)$ de variable réelle t .

On note R_X son rayon de convergence.

(a) Prouver que $R_X \geq 1$.

On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X .

Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

(b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

1. (a) Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$ converge (vers 1), $\boxed{R_X \geq 1}$.

Le même argument dit que $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge absolument pour $t = \pm 1$ donc $\boxed{[-1, 1] \subset D_{G_X}}$.

D'après la formule de transfert, pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, $\boxed{G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)}$.

(b) D'après la théorie des séries entières, G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}}.$$

2. (a) $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. On reconnaît une série exponentielle donc

$$\boxed{R_X = +\infty, D_{G_X} = \mathbb{R} \text{ et } G_X : t \mapsto e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}}.$$

(b) Comme X et Y sont indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t^X et t^Y le sont et

$$G_{X+Y} : t \mapsto \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) = e^{\lambda_1(t-1)} e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(t-1)}$$

donc $\boxed{X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)}$.

Exercice 111 : Probabilités – Lois marginales à partir d'une loi conjointe discrète

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la famille $\left(P((X = k) \cap (Y = n))\right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est une distribution de probabilités discrète.

2. (a) Déterminer la loi de Y .

(b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

(c) Déterminer l'espérance de Y .

3. Déterminer la loi de X .

1. On montre qu'on a une distribution de probabilités : pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, $\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \geq 0$ et, en utilisant la formule du binôme de Newton puis en reconnaissant une série géométrique,

$$\sum_{\substack{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n 2^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

2. (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et si $n \in \mathbb{N}$, comme $\left((X = k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à X), par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n$$

comme dans la question précédente.

(b) Alors $(1 + Y)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(1 + Y = n) = \mathbb{P}(Y = n - 1) = p(1-p)^{n-1}$ donc $1 + Y \sim \mathcal{G}(p)$.

(c) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1 + Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1$ d'après le cours.

3. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si $k \in \mathbb{N}$, comme $\left((Y = n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à Y), par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \\ &= \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k}\right) \left(\frac{1-p}{2}\right)^k p \\ &= \frac{p \left(\frac{1-p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{1-p}{2}\right)^{k+1}} \\ &= \frac{2p(1-p)^k}{(1+p)^{k+1}} \end{aligned}$$

d'après la formule donnée en préambule.

Remarque : on peut continuer $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k \frac{2p}{1+p} = \left(1 - \frac{2p}{1+p}\right)^k \frac{2p}{1+p}$, obtenir que $1 + X \sim \mathcal{G}\left(\frac{2p}{1+p}\right)$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

**Exercice 112 : Probabilités – Dénombrements d'ensembles**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

On propose plusieurs arguments pour chaque question.

1. **Première méthode** On peut effectuer le dénombrement en réalisant une disjonction de cas selon la valeur de $k = |B| \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Sachant que $k = |B|$, choisir $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$, c'est choisir

- $B \in \mathcal{P}_k(E) : \binom{n}{k}$ possibilités

- puis $A \in \mathcal{P}(B) : 2^k$ possibilités.

$$\text{On a donc } \boxed{a} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = \boxed{3^n}.$$

Deuxième méthode (À visualiser sur un dessin.) Se donner des parties A, B de E telles que $A \subset B$, c'est, pour chaque $x \in E$, choisir (exclusivement) si cet élément

- est dans A ;
- est dans $B \setminus A$;
- n'est pas dans B .

Cela donne 3^n choix possibles en tout et donc $\boxed{a = 3^n}$.

Remarque : plus formellement, cela revient à construire une bijection $\{A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B\} \rightarrow \{0, 1, 2\}^E$.

2. **Première méthode**

$$b = |\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \emptyset\}| = |\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B^c\}| = |\{(A, C) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset C\}| = a$$

$$\text{donc } \boxed{b = 3^n}.$$

Deuxième méthode On peut effectuer le dénombrement en réalisant une disjonction de cas selon la valeur de $k = |B| \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Sachant que $k = |B|$, choisir $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, c'est choisir

- $B \in \mathcal{P}_k(E) : \binom{n}{k}$ possibilités

- puis $A \in \mathcal{P}(B^c) : 2^{n-k}$ possibilités.

$$\text{On a donc } \boxed{b} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = \boxed{3^n}.$$

Troisième méthode (À visualiser sur un dessin.) Se donner des parties A, B de E telles que $A \cap B = \emptyset$, c'est, pour chaque $x \in E$, choisir (exclusivement) si cet élément

- est dans A ;
- est dans B ;
- n'est pas dans $A \cup B$.

Cela donne 3^n choix possibles en tout et donc $\boxed{b = 3^n}$.

3. **Première méthode** (À visualiser sur un dessin.)

$$c = |\{(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, A \cup B \cup C = E\}| = |\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \emptyset\}| = b$$

car $C = E \setminus (A \cup B)$ est uniquement déterminé connaissant A et B . Donc $\boxed{c = 3^n}$.

Deuxième méthode On peut effectuer le dénombrement en réalisant une disjonction de cas selon la valeur de $k = |B| \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Sachant que $k = |B|$, choisir $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cup B \cup C = E$, c'est choisir

- $B \in \mathcal{P}_k(E) : \binom{n}{k}$ possibilités

- puis $A \in \mathcal{P}(B^c) : 2^{n-k}$ possibilités.

- puis $C = E \setminus (A \cup B) : 1$ possibilité.

$$\text{On a donc } \boxed{c} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = \boxed{3^n}.$$

Troisième méthode (À visualiser sur un dessin.) Se donner des parties A, B, C de E telles que $A \sqcup B \sqcup C = E$, c'est, pour chaque $x \in E$, choisir (exclusivement) si cet élément

- est dans A ;
- est dans B ;
- est dans C .

Cela donne 3^n choix possibles en tout et donc $c = 3^n$.