

Calcul différentiel et optimisation

Extrait du programme officiel :

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les objectifs de cette section sont les suivants :

- généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur \mathbb{R} ;
- donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé F de dimension finie. ² Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .

Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.

Dérivées partielles dans une base.

Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.

Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.

b) Différentielle

Application différentiable au point a .

Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.

Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.

Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a . Unicité de la différentielle et relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.

Notations $df(a)$.

Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω .

Notation df .

Cas particuliers : application constante, application linéaire.

Lien entre différentielle et dérivées partielles.

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et si f est à valeurs dans \mathbb{R}^m , la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques.

Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient en base orthonormée.

Notation $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et où f_1, \dots, f_p sont des applications différentiables.

Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de \mathbb{R} , dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$.

Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.



CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Dérivées partielles de

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$$

d) Applications de classe \mathcal{C}^1

Une application f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω .

L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^1 .

Si f est une application de classe \mathcal{C}^1 de Ω dans F , si γ est une application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans Ω , si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω .

La démonstration n'est pas exigible.

Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X , un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X , dérivable en 0 , tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

Si g est une fonction numérique définie et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de E , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $dg(x)$.

Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x .
Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme.

Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Exemple : plan tangent à une surface de \mathbb{R}^3 définie par une équation.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω , si X est une partie de Ω , si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x , alors $df(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x .

Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de E , si X est l'ensemble des zéros de g , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x , alors $df(x)$ est colinéaire à $dg(x)$.

Exemples de recherches d'extremums globaux.

Si E est euclidien, traduction en termes de gradient.
Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe \mathcal{C}^k

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

Une application est dite de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω .

Théorème de Schwarz.

Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^k . Composition d'applications de classe \mathcal{C}^k .

Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f, \partial_{j_1, \dots, j_k} f.$

La notion de différentielle seconde est hors programme.

Démonstration non exigible.

Les démonstrations ne sont pas exigibles.
Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Plan du cours

26 Calcul différentiel et optimisation	1
I Différentielle	4
1 Différentielle en un point	4
2 Cas particuliers	5
3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	6
4 Lien entre différentielle et dérivées partielles	7
5 Matrice jacobienne	8
6 Gradient	9
II Opérations sur les différentielles	10
1 Combinaisons linéaires	10
2 Image par une application multilinéaire	10
3 Composition	12
III Classe \mathcal{C}^1	13
IV Vecteurs tangents	14
V Optimisation (recherche d'extremums)	17



Dans tout le chapitre, E et F désignent des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie nulle, \mathcal{U} désigne un ouvert de E .

1 DIFFÉRENTIELLE

1 Différentielle en un point

Rappel : si I est intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow F$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si on a un vecteur $b \in F$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hb + \underset{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}}{o}(h)$$

(et, dans ce cas, $b = f'(a)$).

Nous allons généraliser cette idée aux fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie E .

Définition 1 : Application différentiable en un point

Soit f définie sur un ouvert \mathcal{U} de E , à valeurs dans F . Soit a un point de \mathcal{U} . On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ_a de E dans F telle que, au voisinage de 0_E ,

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(h)$$

ou encore, au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + \ell_a(x-a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a).$$

Lorsqu'elle existe, l'application ℓ_a est unique et appelée **différentielle** de f au point a ou encore **application linéaire tangente** à f en a , notée $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$. On a donc

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(h)$$

Remarque

R1 – On rappelle qu'un $\underset{h \rightarrow 0_E}{o}(h)$ est un $\underset{h \rightarrow 0_E}{o}(\|h\|_E)$, c'est-à-dire de la forme $\|h\|_E \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$. Ainsi, pour montrer que $\varphi(h) = \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(\|h\|_E)$, il suffit de montrer que $\frac{\|\varphi(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_{\mathbb{R}}$.

R2 – Lorsque cela a du sens, on définit donc une application $df : \begin{cases} E & \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a & \rightarrow df(a) \end{cases}$ appelée **différentielle** de f .

R3 – On note parfois $df(a) \cdot h$ ou $df_a(h)$ au lieu de $df(a)(h)$.

R4 – L'unicité vient du

Lemme 1

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est telle que $\varphi(h) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)$, alors φ est l'application nulle.

Démonstration

$\varphi(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$.

Alors pour tout $x \in E$, $t \in \mathbb{R}_*^+$, $t\varphi(x) = \varphi(tx) = t\|x\| \varepsilon(tx)$ donc $\varphi(x) = \|x\| \varepsilon(tx) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0_F$.

Donc pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = 0_F$. ■

Propriété 1 : différentiable \Rightarrow continue

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Démonstration

Par continuité de l'application linéaire en dimension finie (celle de E suffit) $df(a)$, en passant à la limite dans le développement limité, $f(a+h) - f(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$. ■

2 Cas particuliers

Propriété 2 : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Dans le cas d'une fonction $f : I \rightarrow F$, f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a . Dans ce cas, $df(a) : h \mapsto hf'(a)$ et en particulier $f'(a) = df(a)(1)$.

Démonstration

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $b \in F$ tel que $f(a+h) = f(a) + hb + o(h)$ si et seulement si f est différentiable en a car $h \mapsto hb$ est linéaire.
Le cas échéant, $df(a) : h \mapsto hb = hf'(a)$. ■

Propriété 3 : Cas d'une fonction constante

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est constante, elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Démonstration

$f(a+h) = f(a) + 0_F + 0_F$ avec $h \mapsto 0_F$ linéaire et $0_F = o(h)$.
Donc f est différentiable en a et $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$. ■

Propriété 4 : Cas d'une fonction linéaire

Si $\tilde{f} : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est la restriction à \mathcal{U} d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $d\tilde{f}(a) = f$ (et donc $d\tilde{f}$ est constante).

En particulier, f est différentiable sur E et $\forall a \in E$, $df(a) = f$.

Démonstration

$\tilde{f}(a+h) = f(a+h) = f(a) + f(h) + 0_F$ avec f linéaire et $0_F = o(h)$.
Donc \tilde{f} est différentiable en a et $d\tilde{f}(a) = f$ (donc $d\tilde{f}$ est constante.) ■

Exercice 1 : Montrer que $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longrightarrow & M^2 \end{matrix}$ est différentiable en toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $df(A)$.

$(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ avec $H \mapsto AH + HA$ linéaire et en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes), $0 \leq \|H^2\| \leq \|H\|^2$ donc $\frac{\|H^2\|}{\|H\|} \rightarrow 0$ et $H^2 = o(H)$. Donc f est différentiable en A et $df(A) : H \mapsto AH + HA$.



Exercice 2 : Montrer que, si E est un espace euclidien $f : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$ est différentiable en toute $a \in E$ et calculer $df(a)$.

$\|a+h\|^2 = \|a\|^2 + 2(a|h) + \|h\|^2$ avec $h \mapsto 2(a|h)$ linéaire et $\|h\|^2 = o(h)$. Donc f est différentiable en a et $df(a) : h \mapsto 2(a|h)$.

Exercice 3 : Montrer que, si E est un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, $f : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x|u(x)) \end{cases}$ est différentiable en toute $a \in E$ et calculer $df(a)$. Que se passe-t-il si, de plus, u est symétrique ?

$(a+h|u(a+h)) = (a|u(a)) + (h|u(a)) + (a|u(h)) + (h|u(h))$ avec $h \mapsto (h|u(a)) + (a|u(h))$ linéaire et $|(h|u(h))| \leq \|h\| \|u(h)\|$ par Cauchy-Schwarz (pour la norme euclidienne associée au produit scalaire) et comme $\|u(h)\| \rightarrow 0$ par continuité, $(h|u(h)) = o(h)$.

Donc f est différentiable en a et

$$df(a) : h \mapsto (h|u(a)) + (a|u(h)) = (h|u(a) + u^*(a)),$$

ce qui devient $2(u(a)|h)$ si de plus u est symétrique.

3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Le fait de travailler sur un ouvert \mathcal{U} assure, pour a point de \mathcal{U} et v vecteur de E , l'existence d'un $\delta > 0$ (« distance de sécurité ») tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a + tv \in \mathcal{U}$ (on s'éloigne de a dans la direction de v), cela permet de définir l'application $\phi : t \mapsto f(a + tv)$ d'une variable réelle au voisinage de 0.

Définition 2 : Dérivée selon un vecteur

On dit que $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est **dérivable selon le vecteur $v \in E$ au point $a \in \mathcal{U}$** , lorsque $\phi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.

On note alors $D_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in F$.

Exemple

E1 – La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $(0, 0)$ sinon admet des dérivées selon tout vecteur en $(0, 0)$ et si $v = (\alpha, \beta) : D_v f((0, 0)) = 0$ si $\alpha = 0$ et $\frac{\beta^2}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$.

Définition 3 : Dérivées partielles

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On appelle **j^{e} dérivée partielle de f en a** , lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur e_j de base en a :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) \in F.$$

Remarque

R5 – Les dérivées partielles vues pour les fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^p sont les dérivées partielles dans la base canonique de \mathbb{R}^p .

Bien sûr la notion générale de dérivée partielle dépend de la base choisie. En ce sens, la notation $D_{e_j} f(a)$ est la plus précise.

R6 – Comme on en a déjà l’habitude, calculer la j^{e} dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j : en effet, on dérive

$$\phi : t \mapsto f(a + te_j) = f(a_1e_1 + \dots + (a_j + t)e_j + \dots + a_ne_n)$$

en 0, ce qui revient aussi à dériver

$$t \mapsto f(a_1e_1 + \dots + te_j + \dots + a_ne_n)$$

en a_j .

Exemple

E2 – Avec $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $(0, 0)$ sinon, on voit que \triangleleft on peut avoir des dérivées partielles en $(0, 0)$ sans avoir de dérivée selon certains vecteurs ($v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^2$, ici).

Remarque

R7 – Et donc \triangleleft l’existence de dérivées partielles **ne garantit pas** la différentiabilité (mais la réciproque est vraie, avec ce qui précède).
D’ailleurs, une application différentiable est automatiquement continue, alors que l’existence de dérivées partielles ne suffit pas à garantir la continuité, comme vu dans le premier chapitre de calcul différentiel.

4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Propriété 5 : Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et $D_v f(a) = df(a)(v)$.

Démonstration

$$f(a + tv) = f(a) + df(a)(tv) + o_{t \rightarrow 0}(t) \text{ donc } \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} df(a)(v) \text{ par linéarité de } df(a).$$

Cas particulier 1 : Dérivée selon un vecteur de base

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base \mathcal{B} . Si f est différentiable en a , alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$df(a)(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

**Propriété 6 : Expression de la différentielle avec les dérivées partielles**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$ tel que f est différentiable en a .

Alors pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E$,

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

On note $dx_j : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ h & \mapsto h_j \end{cases}$ la forme linéaire j^{e} coordonnée dans \mathcal{B} . Alors on a

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

Démonstration

C'est la linéarité de $df(a)$:

$$df(a) \left(\sum_{j=1}^p h_j e_j \right) = \sum_{j=1}^p h_j df(a)(e_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarque

R8 – Le DL_1 de f différentiable en a s'écrit alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o_{h \rightarrow 0_E}(h).$$

5 Matrice jacobienne**Définition 4 : Matrice jacobienne**

Soit $p = \dim E$, $n = \dim F$, \mathcal{U} ouvert de E et $f : E \rightarrow F$ différentiable, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . On note $f = \sum_{i=1}^n f_i \varepsilon_i$.

On appelle **matrice jacobienne** de f en a dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$.

Propriété 7 : Matrice jacobienne et différentielle

$$J_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(df(a))$$

Démonstration

$$df(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i$$

permet bien de remplir la j^{e} colonne de $J_f(a)$.

6 Gradient

Définition 5 : Gradient

Soit E un espace **euclidien**, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\text{grad } f(a)$ et appelé **gradient de f en a** tel que pour tout $h \in E$,

$$df(a)(h) = (\nabla f(a)|h).$$

Démonstration

C'est le théorème de représentation de Riesz : la **forme** linéaire $df(a)$ s'écrit $x \mapsto (b|x)$ pour un certain vecteur $b...$

Remarque

R9 – On comprend mieux la notation alternative $df(a) \cdot h$ faisant penser à un produit scalaire. Le DL₁ de f différentiable en a dans E euclidien se réécrit

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

R10 – Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique,

$$df(a)(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

On retrouve notre gradient habituel.

Exactement le même raisonnement (expression du produit scalaire en base orthonormée) donne la propriété suivante.

Propriété 8 : Coordonnées du gradient

Soit E un espace **euclidien**, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si l'on fixe une base **orthonormée** de E , les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans cette base sont

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Remarque : Interprétation géométrique

R11 – On suppose f différentiable en a et $\nabla f(a) \neq 0_E$.

Notons S la sphère unité de E pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall h \in S, \quad df(a)(h) = (\nabla f(a)|h) \leq |(\nabla f(a)|h)| \leq \|\nabla f(a)\| \|h\| = \|\nabla f(a)\|.$$

Or ce majorant est atteint pour $h_0 = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Ainsi le vecteur $\nabla f(a)$ donne la direction et le sens de plus forte variation de la fonction f .

C'est à la base d'algorithmes d'optimisation (descente de gradient), utilisé par exemple en Machine Learning (apprentissage automatique).

Ci-après, on représente, au cœur de Mafate, des « lignes de niveau » de la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ qui au point de coordonnées (x, y) associe son altitude (on parle d'isoplèthes d'altitude).

Ces lignes de niveau sont des courbes d'équation $f(x, y) = \text{constante}$.

Tracer la direction et le sens de ∇f en quelques points.

On peut montrer que le gradient est normal aux lignes de niveaux en tous points.



II OPÉRATIONS SUR LES DIFFÉRENTIELLES

1 Combinaisons linéaires

Propriété 9 : Linéarité

Soit \mathcal{U} ouvert de E , $f, g : \mathcal{U} \rightarrow F$ différentiables en $a \in \mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

Démonstration

Il suffit de remarquer, par propriétés de la dérivation que $J_{\lambda f + \mu g}(a) = \lambda J_f(a) + \mu J_g(a)$ et de repasser aux applications linéaires.

Autre possibilité : on ajoute les DL₁ :

$$\lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \lambda f(a) + \mu g(a) + \lambda df(a)(h) + \mu dg(a)(h) + o(h)$$

avec $\lambda df(a) + \mu dg(a)$ linéaire, donc par unicité, $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

Remarque

R 12 – $f \mapsto df$ est donc linéaire.

2 Image par une application multilinéaire

Propriété 10 : Image par une application multilinéaire

Soit \mathcal{U} ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, E_1, \dots, E_q, F des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie, $f_1 : \mathcal{U} \rightarrow E_1, \dots, f_q : \mathcal{U} \rightarrow E_q$ des applications différentiables en $a \in \mathcal{U}$ et $M : E_1 \times \dots \times E_q \rightarrow F$ une fonction q -linéaire.

Alors $\phi : \mathcal{U} \rightarrow F$ définie par $\phi : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_q(x))$ est différentiable en a et

$$d\phi(a) : h \mapsto \sum_{k=1}^q M(f_1(a), \dots, df_k(a)(h), \dots, f_q(a)).$$

Corollaire 1 : Différentielle d'un produit, d'un produit scalaire

- Si f et g sont des fonctions différentiables sur \mathcal{U} à valeurs réelles, alors $f \times g$ l'est et

$$d(f \times g)(a) : h \mapsto df(a)(h) \times g(a) + f(a) \times dg(a)(h).$$

- Si f et g sont des fonctions différentiables sur \mathcal{U} à valeurs dans un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$, alors $(f|g)$ l'est et

$$d(f|g)(a) : h \mapsto (df(a)(h)|g(a)) + (f(a)|dg(a)(h)).$$

Démonstration

On traite le cas d'une application B bilinéaire. Le cas général est analogue.

1^{re} tentative On peut voir le faire avec les dérivées selon les vecteurs. On sait, sous réserve d'existence, que $d\phi(a)(h) = D_h\phi(a)$. Or

$$\psi : t \mapsto \phi(a + th) = B(f(a + th), g(a + th))$$

est dérivable en 0 (car f et g sont différentiables en a) de dérivée

$$\begin{aligned} \psi'(0) &= D_h\phi(a) = B(D_hf(a), g(a)) + B(f(a), D_hg(a)) \\ &= B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)) \end{aligned}$$

Le problème est que l'existence de dérivée selon tout vecteur ne garantit pas la différentiabilité...

On peut par exemple montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$ admet des dérivées selon tout vecteur en $(0, 0)$ mais n'est pas continue, et encore moins différentiable.

Bonne méthode On utilise les DL₁ : avec $\varepsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon_2(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$,

$$\begin{aligned} \phi(a + h) &= B(f(a + h), g(a + h)) \\ &= B(f(a) + df(a)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h), g(a) + dg(a)(h) + \|h\| \varepsilon_2(h)) \\ &= B(f(a), g(a)) + B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)) + \psi(h) \end{aligned}$$

avec $h \mapsto B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h))$ linéaire et

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \|h\| B(f(a) + df(a)(h), \varepsilon_2(h)) + \|h\| B(\varepsilon_1(h), g(a) + dg(a)(h)) \\ &\quad + \|h\|^2 B(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h)) + B(df(a)(h), dg(a)(h)) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\psi(h)}{\|h\|} &= B(f(a) + df(a)(h), \varepsilon_2(h)) + B(\varepsilon_1(h), g(a) + dg(a)(h)) \\ &\quad + \|h\| B(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h)) + \frac{B(df(a)(h), dg(a)(h))}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Les trois premiers termes tendent vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$ par continuité de l'application bilinéaire en dimension finie.

Pour le dernier, on remarque que

$$(x, y) \mapsto B(df(a)(x), dg(a)(y))$$

est bilinéaire, donc on a, par continuité, un réel C tel que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{B(df(a)(h), dg(a)(h))}{\|h\|} \right\| &= \frac{\|B(df(a)(h), dg(a)(h))\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{C \|h\|^2}{\|h\|} = C \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Donc $\psi(h) = o_{h \rightarrow 0}(h)$, ce qui permet d'obtenir toute la conclusion.

Exercice 4 : CCINP 58



Exercice 5 : Retrouver la différentielle de $f : x \mapsto \|x\|^2$ pour une norme euclidienne et de $g : x \mapsto (x|u(x))$ où u est un endomorphisme de E euclidien.

On réécrit $f : x \mapsto (x|x)$.

La bilinéarité du produit scalaire et la différentiabilité des applications linéaires id_E et u assurent la différentiabilité de f et de g .

De plus, pour tout $x \in E$, $d \text{id}_E(x) = \text{id}_E$ et $d u(x) = u$ par linéarité.

Donc, pour tout $x, h \in E$,

$$d f(x)(h) = (d \text{id}_E(x)(h) | \text{id}_E(x)) + (\text{id}_E(x) | d \text{id}_E(x)(h)) = 2(x|h)$$

et

$$d g(x)(h) = (d \text{id}_E(x)(h) | u(x)) + (\text{id}_E(x) | d u(x)(h)) = (x|u(h)) + (h|u(x)) = (h|u(x) + u^*(x)).$$

3 Composition

Propriété 11 : Différentielle d'une composée

Soit \mathcal{U} ouvert de E , \mathcal{V} ouvert de F , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{V} \rightarrow G$ différentiable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = d g(f(a)) \circ d f(a).$$

Propriété 12 : Matrice jacobienne d'une composée

En munissant E , F et G de bases, on obtient

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Remarque

R 13 – D'où la règle de la chaîne.

Démonstration

Il suffit de composer les DL₁ : on écrit, avec $\varepsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon_2(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$, et pour simplifier la lecture, les applications linéaires $\varphi = d f(a)$ et $\psi = d g(f(a))$,

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$$

et

$$g(f(a) + k) = g(f(a)) + \psi(k) + \|k\| \varepsilon_2(k)$$

puis

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g\left[f(a) + \underbrace{(\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h))}_k\right] \\ &= g(f(a)) + \psi(\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \\ &\quad + \|\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\| \varepsilon_2(\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \\ &= g \circ f(a) + [\psi \circ \varphi](h) + \zeta(h) \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\zeta(h)}{\|h\|} = \psi(\varepsilon_1(h)) + \frac{\|\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} \varepsilon_2(\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)).$$

φ et ψ étant linéaires en dimension finie, elles sont continues, donc $\psi(\varepsilon_1(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, $\varphi(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ puis $\varepsilon_2(\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Enfin,

$$\frac{\|\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} + \varepsilon_1(h)$$

et par continuité de l'application linéaire φ , on a $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout h , $\|\varphi(h)\| \leq C \|h\|$ donc $\frac{\|\varphi(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\|}{\|h\|}$ est borné et finalement $\frac{\zeta(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, c'est-à-dire $\zeta(h) = o(h)$.

Par unicité, on en déduit que $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = \psi \circ \varphi = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Corollaire 2 : Dérivée le long d'un arc

Soit \mathcal{U} ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, I intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ une application dérivable. On suppose que f est différentiable en $\gamma(t)$ où $t \in I$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

En munissant E d'une base, on retrouve l'expression vue avec la règle de la chaîne, si les coordonnées de $\gamma(t)$ sont $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_p(t))$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^p \gamma'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

En particulier, si $\gamma : t \mapsto x + tv$ où $x, v \in \mathcal{U}$ sont fixés,

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(v) = D_v f(\gamma(t)).$$

III CLASSE \mathcal{C}^1

Définition 6 : Fonctions de classe \mathcal{C}^1

$f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est dite **de classe \mathcal{C}^1** lorsque f est différentiable sur \mathcal{U} et $df : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Propriété 13 : Opérations

Toute combinaison linéaire, toute composée d'applications de classe \mathcal{C}^1 l'est encore. Si M est q -linéaire et f_1, \dots, f_q sont \mathcal{C}^1 , $M(f_1, \dots, f_q)$ l'est.

Propriété 14 : Caractérisation par les applications coordonnées

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, d'applications coordonnées (f_1, \dots, f_n) dans une base de F . f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si toutes les f_i le sont.

Théorème 1 : IMPORTANT - Caractérisation avec les dérivées partielles

f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si, dans une base quelconque de E , toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Démonstration

Non exigible.

**Propriété 15 : Expression intégrale le long d'un arc**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathcal{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

Démonstration

On a vu que $df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t)$, c'est donc une simple application du théorème fondamental de l'analyse. ■

Corollaire 3 : Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$

En particulier, avec $\gamma(t) = a + tv$ sur $[0, 1]$,

$$f(a+v) - f(a) = \int_0^1 df(a+tv)(v) dt = \int_0^1 D_v f(a+tv) dt.$$

Corollaire 4 : Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$ et \mathcal{U} est un ouvert **connexe par arcs**, alors

f est constante si et seulement si $df = 0$.

Démonstration

Le sens direct a déjà été vu.

Pour le sens réciproque, seul le cas convexe est au programme. On suppose donc \mathcal{U} convexe et $df = 0$. Soient $a, b \in \mathcal{U}$, on veut montrer que $f(a) = f(b)$.

Mais on peut relier a et b par un segment inclus dans \mathcal{U} par convexité : $\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow (1-t)a + tb$ de classe \mathcal{C}^1 .

Alors, la propriété précédente donne $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a+t(b-a))(b-a) dt = 0$. ■

IV VECTEURS TANGENTS**Définition 7 : Vecteur tangent**

Si X est une partie de E , $a \in X$. Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à X en a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

On note $T_a X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en a .

Exemple

E3 – Si \mathcal{G} est un sous-espace affine de E de direction G (sous-espace vectoriel de E), pour tout $a \in \mathcal{G}$,

$$T_a \mathcal{G} = G$$

En effet, on peut écrire $\mathcal{G} = a + G$.

- Si $v \in G$, soit $\gamma : \begin{cases}]-1, 1[& \rightarrow \mathcal{G} \\ t & \rightarrow a + tv \end{cases}$ est dérivable en 0, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

- Réciproquement, si $v \in T_a \mathcal{G}$, on a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors v est la limite lorsque $t \rightarrow 0$ de $\frac{\gamma(t) - a}{t} \in G$ et comme G est un sous-espace de E qui est de dimension finie, il l'est aussi, donc il est fermé et donc $v \in G$.

E4 – Sphère d'un espace euclidien : si $a \in S(0_E, 1)$,

$$T_a S(0_E, 1) = a^\perp$$

En effet,

- si $v \in a^\perp$ est non nul, $v' = \frac{v}{\|v\|} \in S(0_E, 1)$ vecteur unitaire associé, soit

$$\gamma : \begin{cases}]-1, 1[& \rightarrow S(0_E, 1) \\ t & \mapsto \cos(\|v\| t)a + \sin(\|v\| t)v' \end{cases}$$

est bien défini car, par théorème de Pythagore, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\|\cos(\|v\| t)a + \sin(\|v\| t)v'\|^2 = \cos^2(\|v\| t) + \sin^2(\|v\| t) = 1,$$

dérivable en 0, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Donc $a^\perp \subset T_a S(0_E, 1)$.

Si $v = 0_E$, il suffit de considérer l'application constante $\gamma : t \mapsto a$ pour conclure que $0_E \in T_a S(0_E, 1)$.

- Réciproquement, si $v \in T_a S(0_E, 1)$, on a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S(0_E, 1)$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
 Mais $f : t \mapsto \|\gamma(t)\|^2 = (\gamma(t)|\gamma(t)) = 1$ est constante et dérivable en 0, donc $0 = f'(0) = 2(\gamma(0)|\gamma'(0)) = 2(a|v)$ donc $v \in a^\perp$.

Le programme propose un énoncé, à la démonstration hors programme, permettant de traiter le cas général des ensemble décrit par une équation implicite $g(x) = 0$.

Propriété 16 : Hyperplan tangent à une partie décrite implicitement

Soit g une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} , $X = \{x \in \mathcal{U}, g(x) = 0_{\mathbb{R}}\}$ et $a \in X$.
 Si $dg(a) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ (a est dit **régulier**, dénomination hors-programme), alors

$$T_a X = \text{Ker}(dg(a)) = \nabla g(a)^\perp.$$

(L'espace étant supposé euclidien pour utiliser le gradient.)

Autrement dit, X admet un hyperplan affine tangent en a qui est, $a + T_a X = a + \nabla g(a)^\perp$ d'équation

$$(\nabla g(a)|x - a) = 0.$$

Démonstration : Hors-programme

Une seule inclusion est prouvable avec notre programme.

Si v est tangent à X en a , on a $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, g(\gamma(t)) = 0$.

En dérivant en $t = 0$, $dg(\gamma(0))(\gamma'(0)) = dg(a)(v) = 0$, donc $v \in \text{Ker } dg$. ■

On utilisera en particulier ce résultat pour décrire les vecteurs tangents en un point d'une surface.

Une surface est en général décrite par une équation explicite $z = f(x, y)$ (attention le vecteur x de l'énoncé précédent correspond ici au vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans lequel x désigne un nombre réel.)

On se ramène alors au cas implicite en posant $g : (x, y, z) \mapsto f(x, y) - z$. La surface est alors décrite par l'équation implicite $g(x, y, z) = 0$.

**Propriété 17 : Plan tangent pour une surface explicite**

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface représentative de f , c'est-à-dire $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathcal{U} \text{ et } z = f(x, y)\}$. On définit

$$g : \begin{cases} \mathcal{U} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto f(x, y) - z \end{cases}$$

L'ensemble $T_a S$ des vecteurs tangents à S en $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ est un plan vectoriel $P = \nabla g(a)^\perp$ de vecteur normal le vecteur (non nul) $\nabla g(a)$, donc d'équation

$$(\nabla g(a) | (x, y, z)) = 0.$$

On appelle **plan tangent à S en a** le plan affine $\mathcal{P} = a + P$ passant par a et de direction l'ensemble P des vecteurs tangents à S en a , d'équation

$$(\nabla g(a) | (x - x_0, y - y_0, z - z_0)) = 0$$

Remarque

R 14 – On retrouve, pour le plan tangent, une équation type « équation de la tangente » :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Démonstration

On raisonne toujours par double inclusion.

- Si $v = (x, y, z) \in T_a S$, on a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Alors, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ avec $z(t) = f(x(t), y(t))$ donc

$$\begin{aligned} z = z'(0) &= x'(0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

donc

$$0 = x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - z = (\nabla g(a) | (x, y, z))$$

$$\text{car } \nabla g(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

- Si $v = (x, y, z)$ est orthogonal à $\nabla g(a)$, on définit

$$\gamma : \begin{cases}]-1, 1[& \longrightarrow S \\ t & \longmapsto (x_0 + tx, y_0 + ty, f(x_0 + tx, y_0 + ty)) \end{cases}$$

Alors γ est dérivable en 0, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \left(x, y, x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (x, y, z)$ car $(\nabla g(a) | v) = 0$.

**Méthode 1 : Trouver une équation d'hyperplan tangent**

On retiendra que dans tous les cas, mieux vaut repasser par une équation **implicite** $g(x) = 0$ pour trouver une équation d'hyperplan tangent.

Le théorème précédent donne alors une équation du-dit hyperplan tangent en un point a n'annulant pas la dg.

Par exemple, le plan tangent à la surface S d'équation $g(x, y, z) = 0$ en $a = (x_0, y_0, z_0)$ est le plan affine $a + \nabla g(a)^\perp$

passant par a et de direction le plan vectoriel $T_a S = \nabla g(a)^\perp$ de vecteur normal $\nabla g(a) \neq (0, 0, 0)$, d'équation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

où $g(a) = g(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Exemple

E5 – Équation du plan tangent en un point d'une sphère de \mathbb{R}^3 :

La sphère de centre (x_c, y_c, z_c) et de rayon $r > 0$ a pour équation

$$g(x, y, z) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 - r^2 = 0$$

En un point $a = (x_0, y_0, z_0)$ de la sphère, le gradient vaut $(2(x_0 - x_c), 2(y_0 - y_c), 2(z_0 - z_c)) \neq (0, 0, 0)$ car le centre n'est pas sur la sphère (avec $r > 0$) et l'équation du plan tangent est donc

$$(x_0 - x_c)(x - x_0) + (y_0 - y_c)(y - y_0) + (z_0 - z_c)(z - z_0) = 0$$

V OPTIMISATION (RECHERCHE D'EXTREMUMS)

Définition 8 : Point critique

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$.
Si E est euclidien, cela équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Propriété 18 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit X partie de E , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in X$. On suppose

H1 Très important : $a \in \overset{\circ}{X}$ est un **point intérieur** à X (c'est le cas par exemple si X est un **ouvert**)

H2 f différentiable en a ,

H3 f présente un extremum local en a ,

alors a est un point critique de f , c'est-à-dire $df(a) = 0$.

Démonstration

Il suffit de revenir aux dérivées partielles. ■

Propriété 19 : Vecteurs tangents en un extremum local

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert \mathcal{U} , X une partie de \mathcal{U} , $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et f est différentiable en a , alors

$$\forall v \in T_a X, df(a)(v) = 0.$$

Autrement dit, dans le cas où E est euclidien,

$$T_a X \subset \text{Ker}(df(a)) = (\nabla f(a))^\perp$$

**Démonstration**

Soit $v \in T_a X$. On a $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
Alors, $f \circ \gamma$ admet un extremum local en $0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui est ouvert, donc

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(a)(v).$$

Remarque

R 15 – Autrement dit, les vecteurs tangents à X en a extremum local de $f|_X$ sont dans l'hyperplan vectoriel de vecteur normal $\nabla f(a)$.

Théorème 2 : d'optimisation sous contrainte

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ où \mathcal{U} est un ouvert de E , et $X = \{x \in \mathcal{U}, g(x) = 0\}$.
Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $dg(a) \neq 0_E$, alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$.

Démonstration

- Soit $df(a)$ est nulle et $df(a) = 0 \cdot dg(a)$.
- Soit $df(a)$ n'est pas nulle et on prouve que $\text{Ker}(df(a)) = \text{Ker}(dg(a))$. En effet, un résultat du programme de première année sur les hyperplans dit que si deux formes linéaires non nulles ont même noyau, elles sont colinéaires.

Comme $dg(a) \neq 0$, et avec la propriété précédente, $\text{Ker}(dg(a)) = T_a X \subset \text{Ker}(df(a))$.

Par égalité des dimensions, $\text{Ker } df(a) = \text{Ker } dg(a)$, ce qui conclut.

Terminons avec une extension hors programme, pour la culture.

Théorème 3 : HP : multiplicateurs de Lagrange

Soit f, g_1, \dots, g_p des fonctions numériques de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} de E et

$$X = \{x \in \mathcal{U}, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}.$$

Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont linéaires indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a).$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.