

## Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### 1 Norme et distance

#### Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

**Séparation** Pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$ .

**Homogénéité** Pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ .

**Inégalité triangulaire (ou sous-additivité)**

Pour tout  $x, y \in E$ ,  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

On dit alors que le couple  $(E, N)$  est un **espace vectoriel normé**.

#### Propriété 1 : d'une norme

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $x, y \in E$ .

$$(i) \quad \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$$

$$(ii) \quad \|-x\| = \|x\|$$

$$(iii) \quad \|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

#### Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 1$ .

#### Définition 3 : Distance associée à une norme

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à  $\|\cdot\|$  l'application

$$d : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

#### Propriété 2 : d'une distance

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $d$  distance associée,  $x, y, z \in E$ .

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(ii) \quad \textbf{Symétrie} : d(x, y) = d(y, x).$$

$$(iii) \quad \textbf{Double inégalité triangulaire} :$$

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

#### Définition 4 : distance à une partie

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $A$  une partie non vide de  $E$ ,  $x \in E$ .

On appelle **distance de  $x$  à  $A$**  le réel  $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$  qui est bien défini.

#### Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie

$\begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto d(x, A) \end{cases}$  est 1-lipschitzienne sur  $E$  dans le sens où

$$\forall x, y \in E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

C'est en particulier le cas de  $x \mapsto d(x, a)$  où  $a \in E$  avec  $A = \{a\}$ .

## 2 Norme associée à un produit scalaire

#### Définition 5 : Norme euclidienne

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'application  $\|\cdot\|$  est appelée **norme euclidienne** sur  $E$  associée au produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$ .

#### Propriété 4 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur  $E$ .

## 3 Normes usuelles

### a Sur $\mathbb{K}^n$

#### Définition 6 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|.$$

**Propriété 5 : Ce sont des normes**

Il s'agit de normes sur  $\mathbb{K}^n$ .

**b**

Sur  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathbb{K})$

**Propriété 6 :  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$** 

Si  $X$  est un ensemble non vide, l'ensemble  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ , encore noté  $L^\infty(X, \mathbb{K})$  (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Définition 7 : Norme infini**

On définit, pour  $f \in E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ,

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**Propriété 7 : Rappel**

Si  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $A$  une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ , alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

**Propriété 8 : La norme infini en est une**

$N_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ .

**c**

Sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

**Définition 8 : Normes usuelles sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$** 

On définit, pour  $f \in E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,

$$\|f\|_1 = N_1(f) = \int_a^b |f| \, dx$$

$$\|f\|_2 = N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

**Propriété 9 : Ce sont des normes**

Il s'agit de normes sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

**4****Boules et sphères**

On fixe  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

**Définition 9 : Boule et sphères**

Soient  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ .

**Boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  :**

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}.$$

**Boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  :**

$$\overline{B}(a, r) = B'(a, r) = B_f(a, r) = \overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}.$$

**Sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  :**

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}.$$

**Définition 10 : Partie convexe**

Une partie  $A$  de  $E$  est dite **convexe** lorsque pour tout  $x, y \in E$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $tx + (1 - t)y \in A$ .

**Propriété 10 : Convexité des boules**

Les boules sont convexes.

**5****Parties, suites et fonctions bornées****Définition 11 : Partie bornée**

$A \in \mathcal{P}(E)$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq M$ .

**Propriété 11 : Les boules sont bornées**

Toute boule (ouverte ou fermée) de  $E$  est bornée.

**Définition 12 : Fonction bornée**

Soit  $X$  un ensemble non vide,  $f \in E^X$ .

On dit que  $f$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $\|f(x)\| \leq M$  (ie si  $f(A)$  est une partie bornée de  $E$ .)

On note  $L^\infty(X, E) = \mathcal{B}(X, E)$  l'ensemble des fonctions de  $E^X$  bornées (notations hors-programme).

**Propriété 12 : Norme infini**

On pose, pour  $f \in \mathcal{B}(X, E)$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ , bien défini.

Alors  $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour  $X = \mathbb{N}$  :

**Définition 13 : Suite bornée**

Soit  $u \in E^\mathbb{N}$ . On dit que  $u$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_n\| \leq M$  (ie si  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une partie bornée de  $E$ .)

On note  $\ell^\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$  l'ensemble des suites bornées à valeurs dans  $E$  (notation hors-programme).

## 6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

### Propriété 13

Si  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

On pose, pour  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ ,

$$N(x) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k).$$

Alors  $N$  est une norme sur  $E_1 \times \dots \times E_p$  appelée **norme produit**.

### Propriété 16 : Convergence de la norme des termes

Soit  $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in E$ . Si  $u_n \rightarrow \ell$ , alors  $\|u_n\| \rightarrow \|\ell\|$ .

### Propriété 17 : Convergence par majoration

Si  $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in E$  tel qu'à partir d'un certain rang  $\|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$  et  $\alpha_n \rightarrow 0$ , alors  $u_n \rightarrow \ell$ .

### Définition 16 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de  $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$  toute limite (dans  $(E, \|\cdot\|)$ ) de suite extraite de  $u$ .

### Propriété 18 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

### Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

## 2 Opérations algébriques

### Propriété 19 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit  $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ . Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$ , alors  $u + \lambda v$  est convergente et  $u_n + \lambda v_n \rightarrow \ell + \lambda \ell'$ .

### Propriété 20 : Produit externe de suites convergentes

Si  $(u_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$  et  $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  tel que  $u_n \rightarrow \ell \in E$  et  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K}$ , alors  $\alpha_n u_n \rightarrow \alpha \ell$ .

## 3 Suite à valeurs dans un produit

### Propriété 21 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés,  $N$  la norme produit sur  $E_1 \times \dots \times E_p$ ,  $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ . Alors

$u \xrightarrow{N} \ell$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$ .

## II SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

On fixe  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé non nul.

## 1 Convergence d'une suite

### Définition 14 : Suite convergente, divergente

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ .

On dit que  $u$  **converge** vers  $\ell$  lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il y a un rang à partir duquel  $u_n$  est à distance au plus  $\varepsilon$  de  $\ell$ .

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que  $u$  est **convergente** et que  $\ell$  est sa **limite**. On note  $u_n \rightarrow \ell$  ou  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$ .

Lorsque  $u$  n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

### Définition 15 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,  $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $f \in E$ .

Si  $f_n \xrightarrow{N_1} f$ , on parle de **convergence en moyenne**.

Si  $f_n \xrightarrow{N_2} f$ , on parle de **convergence en moyenne quadratique**.

Si  $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$ , on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

### Propriété 14 : Unicité de la limite

Soit  $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell, \ell' \in E$ . Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $u_n \rightarrow \ell'$ , alors  $\ell = \ell'$ .

### Propriété 15 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.



## COMPARAISON DE NORMES

Soit  $(E, +, \times)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ .

### 1 Domination

#### Définition 17 : Domination

On dit que  $N_1$  est dominée par  $N_2$  lorsqu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$ .

#### Propriété 22 : Implication de convergences

Soit  $N_1$  dominée par  $N_2$  et  $u \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ . Si  $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$ , alors  $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ .



**Méthode 1 : Montrer que  $N_1$  n'est pas dominée par  $N_2$**

On peut chercher une suite  $(u_n)$  telle que

- $(N_2(u_n))$  borné mais pas  $(N_1(u_n))$
- ou alors telle que  $N_2(u_n) \rightarrow 0$  et non  $N_1(u_n)$
- ou encore tel que  $\frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \rightarrow +\infty$ .

### 2 Équivalence

#### a Définition

#### Définition 18 : Normes équivalentes

$N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$  tel que  $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$ .

#### Propriété 23 : Équivalence de convergence

Si  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes,  $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$  si et seulement si  $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$ .

#### b Cas de $\mathbb{K}^n$

#### Propriété 24 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur  $\mathbb{K}^n$ .

#### c Cas de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

#### Propriété 25 : Domination des normes

Sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,

- $N_1 \leq (b-a)N_\infty$  et  $N_\infty$  n'est pas dominée par  $N_1$ .
- $N_2 \leq \sqrt{b-a}N_\infty$  et  $N_\infty$  n'est pas dominée par  $N_2$ .
- $N_1 \leq \sqrt{b-a}N_2$  et  $N_2$  n'est pas dominée par  $N_1$ .

#### d Cas de la dimension finie

#### Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

#### Démonstration

Non exigible, admis provisoirement.

#### Propriété 26 : Convergence coordonnée à coordonnée

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

## IV

## TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

On se donne  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé fixé, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $d$  la distance associée.

### 1 Voisinages, ouverts, fermés

#### a Voisinage

#### Définition 19 : Voisinage

Soient  $a \in E$  et  $V$  une partie de  $E$ .

On dit que  $V$  est un **voisinage** de  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset V$ , c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en  $a$  contenue dans  $V$ .

#### Propriété 27 : des voisinages

- Si  $V$  voisinage de  $a$  et  $V \subset W$ , alors  $W$  est un voisinage de  $a$ .
- Une réunion non vide quelconque de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .
- Une intersection **finie** de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

**Propriété 28 : Voisinages et domination de norme**

Si  $N_1$  est une norme dominée par  $N_2$ , alors les voisinages pour  $N_1$  sont des voisinages pour  $N_2$ .

Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

**b****Parties ouvertes****Définition 20 : Ouvert**

Une partie  $\mathcal{O}$  de  $E$  est dite **ouverte** ou **un ouvert** de  $E$  lorsque  $\mathcal{O}$  est voisinage de tous ses points, autrement dit  $\forall a \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(a, r) \subset \mathcal{O}$ .

Par convention,  $\emptyset$  est ouvert.

**Propriété 29 : Cas des boules ouvertes**

Toute boule ouverte est ouverte (!)

**Propriété 30 : des ouverts**

- (i)  $\emptyset, E$  sont ouverts.
- (ii) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.
- (iii) Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.
- (iv) Un produit **fini** d'ouverts est ouvert (pour la norme produit).

**Propriété 31 : Ouverts et domination de normes**

Si  $N_1$  est une norme dominée par  $N_2$ , alors les ouverts pour  $N_1$  sont des ouverts pour  $N_2$ .

Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

**c****Parties fermées****Définition 21 : Fermé**

Une partie  $F$  de  $E$  est dite **fermée** lorsque son complémentaire  $F^c$  est ouvert.

**Propriété 32 : Cas des boules fermées**

Toute boule fermée est fermée (!)

**Propriété 33 : des fermés**

- (i)  $\emptyset, E$  sont fermés.
- (ii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.
- (iii) Une réunion **finie** de fermés est fermée.
- (iv) Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).

**Propriété 34 : Cas des sphères**

Toute sphère de  $E$  est fermée.

**Propriété 35 : Caractérisation séquentielle**

Une partie  $F$  de  $E$  est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de  $F$  a sa limite dans  $F$ .

**2****Adhérence, densité, intérieur****a****Points adhérents, adhérence****Définition 22 : Point adhérent**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $x$  est adhérent à  $A$  lorsque  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Propriété 36 : Caractérisation séquentielle**

$x$  est adhérent à  $A$  si et seulement s'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

**Définition 23 : Adhérence**

L'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$  est l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

**Propriété 37 : Croissance**

Si  $A \subset B$ , alors  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

**Propriété 38 : Caractérisation**

$\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Propriété 39 : Caractérisation des fermés**

$F$  est un fermé de  $E$  si et seulement si  $\bar{F} = F$ .

**Propriété 40 : Cas des sous-espaces et des convexes (HP)**

Si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\bar{A}$  l'est aussi.

Si  $A$  est un convexe de  $E$ , alors  $\bar{A}$  l'est aussi.

**b****Densité****Définition 24 : Densité**

$D$  est **dense** dans  $E$  lorsque  $\bar{D} = E$ , c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre  $D$ .

**Propriété 41 : Caractérisation séquentielle**

$D$  est dense dans  $E$  si et seulement si tout élément de  $E$  est limite d'une suite d'éléments de  $D$ .

**c Intérieur****Définition 25 : Point intérieur et intérieur d'une partie**

Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $x \in E$ .  
 $x$  est un **point intérieur** à  $A$  lorsque  $A$  est un voisinage de  $x$ , c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en  $x$  incluse dans  $A$ .

L'ensemble des points intérieurs à  $A$  est appelé **intérieur** de  $A$ , noté  $\overset{\circ}{A}$ .

**Propriété 42 : Croissance**

Si  $A \subset B$ , alors  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

**Propriété 43 : Caractérisation**

$\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ .

**Propriété 44 : Caractérisation des ouverts**

$\mathcal{O}$  est ouvert si et seulement si  $\overset{\circ}{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ .

**d Frontière****Définition 26 : Frontière**

On appelle **frontière** de  $A$  l'ensemble  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

**Propriété 45 : Caractère fermé**

Une frontière est toujours fermée.

**3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs**

On se fixe une partie  $A$  non vide de  $E$ .

**a Voisinage relatif****Définition 27 : Voisinage relatif**

Soit  $a \in A$ . On appelle **voisinage relatif de  $a$  dans  $A$**  toute partie  $V'$  de  $A$  s'écrivant  $V' = A \cap V$  où  $V$  est un voisinage de  $a$ , c'est-à-dire telle qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \cap A \subset V'$ .

**b Ouverts relatifs****Définition 28 : Ouvert relatif**

Une partie  $\mathcal{O}'$  de  $A$  est un **ouvert relatif de  $A$**  (ou **pour la topologie induite sur  $A$** ) lorsqu'elle est un voisinage relatif de chacun de ses points.

**Propriété 46 : Caractérisation**

$\mathcal{O}'$  de  $A$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$ .

**c Fermés relatifs****Définition 29 : Fermé relatif**

Une partie  $F'$  de  $A$  est un **fermé relatif de  $A$**  si son complémentaire **dans  $A$**  est un ouvert relatif de  $A$ .

**Propriété 47 : Caractérisation**

$F'$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement s'il existe un fermé  $F$  tel que  $F' = F \cap A$ .

**Propriété 48 : Caractérisation séquentielle**

Soit  $F'$  une partie de  $A$ .  
 $F'$  fermé relatif de  $A$  si et seulement si  $F'$  est une partie de  $A$  telle que toute suite d'éléments de  $F'$  convergeant **dans  $A$**  a sa limite dans  $F'$ .

**d Densité****Définition 30 : Densité dans une partie**

Soit  $B$  partie de  $A$ .  $B$  est **dense dans  $A$**  si et seulement si  $A \subset \overline{B}$  si et seulement si tout élément de  $A$  est limite d'une suite d'éléments de  $B$ .