20

Espaces Vectoriels Normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\\| \ \\|_1$, $\\| \ \\|_2$, $\\| \ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\| \ \\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\\| \ \\|_1$ et $\\| \ \\|_2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Point intérieur, point adhérent.	
Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.	
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

Séparation Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Remarque

R 1 – Souvent notée $\|\cdot\|$ également.

R 2 – Pas de cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

R 3 – La positivité est en fait automatique ! Par homogénéité et inégalité triangulaire, si $x \in E$,

$$2N(x) = N(x) + N(-x) \geqslant N(x-x) = N(0_E) = |0|\, N(0_E) = 0$$

Exemple

E 1 – Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ (y en a-t-il d'autres ?) et module sur $\mathbb{C}$.

Propriété 1 : d'une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(*i*) $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$

(*ii*) $\|-x\| = \|x\|$

(*iii*) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Démonstration

(i) Il suffit de prendre $\lambda = 0$ dans l'homogénéité.

(ii) C'est encore l'homogénéité.

(iii) On a déjà $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ puis $\|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec la propriété précédente, puis $\|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$ donne $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$ puis par symétrie des rôles $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|$ ce qui donne bien $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\|$. Enfin, on tire $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$ de la propriété précédente.

■

Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

Remarque

R 4 – Si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{\|x\|}x$est le vecteur normé associé à x (de même direction et de même sens.)

Définition 3 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$\mathrm{d}: \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$$

Propriété 2 : d'une distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(*i*) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.

(*ii*) ***Symétrie*** : $d(x,y) = d(y,x)$.

(*iii*) ***Double inégalité triangulaire*** :

$$\left|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y).$$

Démonstration

(i) Facile.

(ii) Facile.

(iii) $\mathrm{d}(x,y) = \|x-z+z-y\| \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ $d(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ donc $\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y) \leqslant \mathrm{d}(x,y)$ d'où on tire par symétrie $\left|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y)$. ■

Remarque

R5 – Il existe une notion plus générale (Hors Programme) de distance sur un ensemble E : c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ symétrique, telle que $\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$ et vérifiant l'inégalité triangulaire $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.
On dit alors que (E, d) est un **espace métrique**.
C'est bien le cas de la distance associée à une norme.

Définition 4 : distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $x \in E$.
On appelle **distance de x à A** le réel $\mathrm{d}(x,A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(x,a) = \inf_{a \in A} \|x-a\|$ qui est bien défini.

Démonstration

$\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car A non vide) minorée par 0. ■

Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie

$\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,A) \end{array} \right.$ *est 1-lipschitzienne sur E dans le sens où*

$$\forall x, y \in E, \quad \left|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\right| \leqslant \|x-y\|.$$

C'est en particulier le cas de $x \mapsto \mathrm{d}(x,a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

Démonstration

Si $a \in A$, par inégalité triangulaire, $\mathrm{d}(x,A) \leqslant \mathrm{d}(x,a) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,a)$ donc pour tout $a \in A$, $\mathrm{d}(y,a) \geqslant \mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,y)$ qui ne dépend pas de a donc qui est un minorant de $\{\mathrm{d}(y,a),\ a \in A\}$, donc par définition de la borne inférieure, $\mathrm{d}(y,A) \geqslant \mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,y)$, ce qui donne $\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A) \leqslant \mathrm{d}(x,y)$, par symétrie on a aussi $\mathrm{d}(y,A) - \mathrm{d}(x,A) \leqslant \mathrm{d}(x,y)$ et donc $\left|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y)$. ■

2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 5 : Norme euclidienne

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur x de E, on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Propriété 4 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geqslant 0$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = 0 \Rightarrow (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda| \|x\|$
- Inégalité triangulaire : Soient x et y des vecteurs de E. Il est plus pratique de travailler avec le carré des normes :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \\
&= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

3 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition 6 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$

Remarque

R 6 – On rappelle que $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|(x|y)| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$ soit encore

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si (x, y) liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans notre programme.

Propriété 5 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Cas de $\|\cdot\|_1$

Séparation Si $x \in \mathbb{K}^n$ et si $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| = 0$ car on somme des termes positifs, donc $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Homogénéité Pas de difficulté.

Inégalité triangulaire Si $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Cas de $\|\cdot\|_\infty$

Séparation Si $x \in \mathbb{K}^n$ et si $\|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| = 0$ car on prend le maximum de termes positifs, donc $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Homogénéité Si $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|\lambda| |x_k|) = |\lambda| \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty$ car $|\lambda| \geqslant 0$.

Inégalité triangulaire Si $x, y \in \mathbb{K}^n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ donc en particulier $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Cas de $\|\cdot\|_2$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **:** Il s'agit de la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **:** Pas de produit scalaire au programme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bonne définition Si $x \in \mathbb{C}^n$, $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $\|x\|_2$ est bien défini (et positif)/

Séparation Si $x \in \mathbb{C}^n$ et si $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k|^2 = 0$ car on somme des termes positifs, donc $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Homogénéité Pas de difficulté.

Inégalité triangulaire Pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe au programme. On se ramène au cas réel.

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)(\overline{x_k} + \overline{y_k}) = \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k|^2 + |y_k|^2 + \overline{x_k} y_k + x_k \overline{y_k}\right) = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}\left(\overline{x_k} y_k\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathfrak{Re}\left(\overline{x_k} y_k\right) \leqslant |\overline{x_k} y_k| = |x_k| |y_k|$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}\left(\overline{x_k} y_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| |y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} = \|x\|_2 \|y\|_2$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs réels $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et $(|y_1|, \ldots, |y_n|)$.
Finalement, $\|x+y\|_2^2 \leqslant (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$ donc $\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$. ■

Remarque

R 7 – On peut montrer que plus généralement, si $p \geqslant 1$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et même que $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$ (cf TD) d'où la notation.

R 8 – Plus généralement, sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on décompose un vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|$$

qui définissent des normes sur E.

Exemple

E 2 – Sur $\mathbb{K}_n[X]$, on peut définir des normes, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\|P\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$ et $\|P\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |a_k|$.

E 3 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir des normes $\|A\|_1 = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|^2}$, $\|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|$.

b Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K}) = L^\infty(X,\mathbb{K})$

Propriété 6 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, encore noté $L^\infty(X,\mathbb{K})$ (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

R 9 – C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre.

Démonstration

C'est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$ car une partie de cet espace, non vide (contient toute fonction constante) et si $f, g \in \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, $M_f, M_g \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leqslant M_f$ et $|g| \leqslant M_g$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in X$, $|f(x) + \lambda g(x)| \leqslant M_f + |\lambda| M_g$ donc $f + \lambda g \in \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$. ∎

Définition 7 : Norme infini

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Remarque

R 10 – Bien défini que $\operatorname{Im} f = \{|f(x)|,\ x \in X\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

Propriété 7 : Rappel

Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Propriété 8 : La norme infini en est une

N_∞ est une norme sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

Démonstration

Bonne définition Soit $f \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$. $N_\infty(f)$ est bien défini (et positif).

Séparation Soit $f \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$. Si $N_\infty(f) = 0$, pour tout $x \in X$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant N_\infty(f) = 0$ donc $f = 0_{\mathbb{K}^X}$.

Homogénéité C'est la formule rappelée ci-dessus.

Inégalité triangulaire Si $f, g \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ et $x \in X$, $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$ qui ne dépend pas de x, donc $N_\infty(f + g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$. ∎

C Sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$

Définition 8 : Normes usuelles sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 = N_1(f) = \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x$$

$$\|f\|_2 = N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Remarque

R 11 – Pour $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$, on a même $N_\infty(f) = \max_{[a,b]} |f|$.

R 12 – On rappelle que N_2 sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ est la norme associée au produit scalaire canonique

$$(f|g) = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$,

$$|(f|g)| \leqslant N_2(f) N_2(g)$$

soit encore

$$\left|\int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2 \, \mathrm{d}t}$$

avec égalité si et seulement si (f, g) liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans notre programme.

Propriété 9 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration

Soit $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Cas de N_1

Bonne définition Si $f\in E$, $|f|\in E$ et $N_1(f)=\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est bien défini (et positif).

Séparation Si $f\in E$ et si $N_1(f)=\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t=0$, comme $|f|$ est continue et positive, par positivité améliorée, $|f|$ donc f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

Homogénéité Pas de difficulté, par linéarité de l'intégrale.

Inégalité triangulaire Si $f,g\in E$, $N_1(f+g)=\displaystyle\int_a^b |f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t=\mathbb{N}_1(f)+N_1(g)$ par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ et linéarité de l'intégrale.

Cas de N_∞ Se déduit directement de ce qui a été vu sur $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$ car $E\subset\mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$. Notons qu'ici la preuve est un peu plus simple car le $\sup$ est atteint : c'est un $\max$.

Cas de N_2

Bonne définition Si $f\in E$, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\in\mathbb{R}^+$ donc $N_2(f)$ est bien défini (et positif).

Séparation Si $f\in E$ et si $N_2(f)=\sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}=0$, comme $|f|^2$ est continue et positive, par positivité améliorée, $|f|^2$ donc f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

Homogénéité Pas de difficulté.

Inégalité triangulaire (Appelée inégalité de Minkowski dans ce cas.) Soient $f,g\in E$.

Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$N_2(f+g)^2=\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t=\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t+\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t+2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2N_2(f)N_2(g)=\big(N_2(f)+N_2(g)\big)^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Comme tout est positif, on a bien $N_2(f+g)\leqslant N_2(f)+N_2(g)$.

Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ Pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe au programme. On se ramène au cas réel.

$$\begin{aligned}
N_2(f+g)^2&=\int_a^b |f+g|^2=\int_a^b (f+g)\left(\overline{f}+\overline{g}\right)=\int_a^b \left[|f|^2+|g|^2+\overline{f}g+f\overline{g}\right]\\
&=N_2(f)^2+N_2(g)^2+2\int_a^b \mathfrak{Re}\left(\overline{f}g\right)\\
&\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2\int_a^b \left|\overline{f}g\right|\\
&\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2\int_a^b |f||g|\\
&\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2N_2(f)N_2(g) &&\text{par inégalité de Cauchy-Schwarz (réelle), avec } |f|,|g|\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})\\
&\leqslant \big(N_2(f)+N_2(g)\big)^2
\end{aligned}$$

Finalement, $N_2(f+g)\leqslant N_2(f)+N_2(g)$. ■

4 Boules et sphères

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 9 : Boule et sphères

Soient $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}^+$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a,r)=\{x\in E,\ \|x-a\|<r\}$.

Boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{B}(a,r)=B'(a,r)=B_f(a,r)=\overline{B}(a,r)=\{x\in E,\ \|x-a\|\leqslant r\}$.

Sphère de centre a et de rayon r : $S(a,r)=\{x\in E,\ \|x-a\|=r\}$.

Exemple

E 4 – Cas où $r=0$: $B(a,0)=\varnothing$ et $\overline{B}(a,0)=S(a,0)=\{a\}$.

E 5 – Cas de $(\mathbb{R},|\cdot|)$: $B(a,r)=]a-r,a+r[$, $\overline{B}(a,r)=[a-r,a+r]$, $S(a,r)=\{a-r,a+r\}$.

E 6 – Boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.

Définition 10 : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x,y\in E$ et pour tout $t\in[0,1]$, $tx+(1-t)y\in A$.

Remarque

R 13 – $\{tx+(1-t)y,\ t\in[0,1]\}$ représente le segment formé par les extrémités des vecteurs x et y.

Propriété 10 : Convexité des boules

Les boules sont convexes.

Démonstration

Si $x,y\in B(a,r)$, $t\in]0,1[$, $z=(1-t)x+ty$, $\|z-a\|=\left\|(1-t)(x-a)+t(y-a)\right\|\leqslant(1-t)\|x-a\|+t\left\|y-a\right\|<r$.
Le cas de $\overline{B}(a,r)$ est similaire. ■

5 Parties, suites et fonctions bornées

Définition 11 : Partie bornée

$A\in\mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\in A$, $\|x\|\leqslant M$.

Propriété 11 : Les boules sont bornées

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Démonstration

Si $z\in B(a,r)\cup\overline{B}(a,r)$, $\|z\|=\|z-a+a\|\leqslant r+\|a\|$. ■

Remarque

R 14 – Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par exemple fermée).

Définition 12 : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f\in E^X$.

On dit que f est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\in X$, $\left\|f(x)\right\|\leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de E.)

On note $L^\infty(X,E)=\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées (notations hors-programme).

Propriété 12 : Norme infini

On pose, pour $f \in \mathscr{B}(X,E)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$, *bien défini.*
Alors $(\mathscr{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace vectoriel normé.*

Démonstration

Démonstration similaire à $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$ (ce qui est bien licite). ∎

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$:

Définition 13 : Suite bornée

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)
On note $\ell^\infty(E) = \mathscr{B}(\mathbb{N},E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E (notation hors-programme).

Remarque

R 15 – On peut aussi définir une norme infini sur l'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$$

6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété 13

Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ *sont des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés.*
On pose, pour $x = (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$,

$$N(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} N_k(x_k).$$

Alors N *est une norme sur* $E_1 \times \dots \times E_p$ *appelée* ***norme produit****.*

Remarque

R 16 – En prenant $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$, la norme produit sur $\mathbb{K}^n$ est $\|\cdot\|_\infty$.

II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition 14 : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.
On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.
Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.
Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Remarque

R 17 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

R 18 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

R 19 – La convergence dépend a priori de la norme.

Définition 15 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.
Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.
Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

Propriété 14 : Unicité de la limite

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Démonstration

Démonstration similaire à celle des suites numérique en remplaçant les valeurs absolues/modules par des normes. ■

Propriété 15 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Il suffit par exemple de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition. ■

Propriété 16 : Convergence de la norme des termes

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Démonstration

Par inégalité triangulaire, $|\|u_n\| - \|\ell\|| \leqslant \|u_n - \ell\|$. ■

Propriété 17 : Convergence par majoration

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Démonstration

Par propriété sur les suites réelles, on a $\|u_n - \ell\| \to 0$ ce qui signifie $u_n \to \ell$. ■

Définition 16 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de u.

Propriété 18 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Démonstration

En effet, si $u_n \to \ell$, toute suite extraite converge vers ℓ car $\|u_n - \ell\| \to 0$ implique que pour tout extractrice φ, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \to 0$ d'après la propriété connue sur les suites réelles. ■

Remarque

R 20 – Réciproque fausse en général. On verra bien un contexte dans lequel elle est vrai (spoiler : il suffit qu'elle soit à valeur dans un compact.)

Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

2 Opérations algébriques

Propriété 19 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Démonstration

$$\left\|(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda \ell')\right\| \leqslant \|u_n - \ell\| + |\lambda| \left\|v_n - \ell'\right\| \to 0.$$ ■

Propriété 20 : Produit externe de suites convergentes

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

Démonstration

$$\|\alpha_n u_n - \alpha \ell\| = \|(\alpha_n - \alpha) u_n + \alpha(u_n - \ell)\| \leqslant |\alpha_n - \alpha| \, \|u_n\| + |\alpha| \, \|u_n - \ell\| \to 0$$

car u est bornée car convergente. ■

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété 21 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}\right) \in \left(E_1 \times \cdots \times E_p\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. Alors

$$u \xrightarrow{N} \ell \text{ si et seulement si pour tout } k \in [\![1, p]\!],\ u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k.$$

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition de la norme produit

$$N(u_n - \ell) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} N_k\left(u_n^{(k)} - \ell_k\right). \quad \blacksquare$$

III Comparaison de normes

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. On note $B_1(a, r)$ (respectivement $B_2(a, r)$) une boule ouverte pour N_1 (respectivement N_2).

1 Domination

Définition 17 : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.

Remarque

R 21 – Traduction avec les boules : $B_2(a, r/\alpha) \subset B_1(a, r)$.

R 22 – Si une partie ou une fonction ou une suite est bornée pour N_2, elle l'est automatiquement pour N_1 aussi.

Propriété 22 : Implication de convergences

Soit N_1 dominée par N_2 et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

Remarque

R 23 – Si N_1 n'est pas dominée par N_2, on fabrique une suite qui tend vers 0 pour N_2 et diverge pour N_1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in E$ tel que $N_1(x_n) > nN_2(x_n)$. Il suffit alors de poser $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}N_2(x_n)} x_n \ldots$

Méthode 1 : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que

- $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$
- ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$
- ou encore tel que $\dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \longrightarrow +\infty$.

2 Équivalence

a Définition

Définition 18 : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

Remarque

R 24 – C'est une relation d'équivalence.

Propriété 23 : Équivalence de convergence

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

Démonstration

Par la définition de l'équivalence des normes, $N_1(u_n - \ell) \to 0 \iff N_2(u_n - \ell) \to 0$.

b Cas de $\mathbb{K}^n$

Propriété 24 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Visualiser avec des boules.

- $\|\cdot\|_1 \leqslant n\|\cdot\|_\infty$ cas d'égalité : vecteur constant.
- $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.
- $\|\cdot\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|\cdot\|_2$ CS - cas d'égalité : celui de CS = tous égaux.
- $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.
- $\|\cdot\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\cdot\|_\infty$ cas d'égalité : tous égaux.
- $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.

c Cas de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

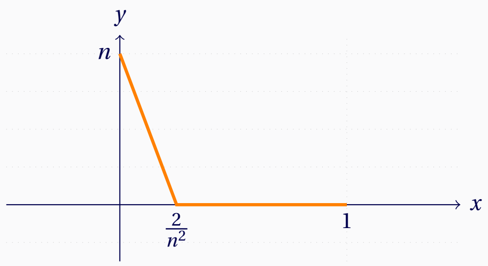
Propriété 25 : Domination des normes

Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

- *$N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_1.*
- *$N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_2.*
- *$N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ et N_2 n'est pas dominée par N_1.*

Démonstration

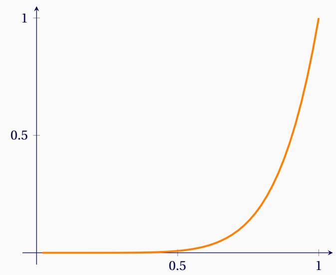
$N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$: plus facile de converger en moyenne qu'uniformément. Égalité pour une fonction constante.
$N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$: égalité pour f constante.
$N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ par Cauchy-Schwarz. Égalité pour f constante.
N_∞ n'est pas dominée par N_1 : sur $[0,1]$, f_n telle que $N_\infty(f_n) = n$ et $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n}$: triangle entre $(0,n)$ et $\left(\dfrac{2}{n^2},0\right)$.



Avec la même suite de fonctions (sur $\left[0, \frac{2}{n^2}\right]$, $f_n(x) = n - \frac{n^3}{2}x$) et un changement de variable simple, $N_2(f_n) = \frac{2}{3}$: N_2 n'est pas dominée par N_1.

Et donc N_∞ n'est pas dominée par N_2 non plus.

On peut aussi utiliser $g_n : t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$ avec $N_\infty(g_n) = 1$, $N_1(g_n) = \frac{1}{n+1} \to 0$ et $N_2(g_n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$ qui permet de montrer que N_∞ n'est dominée ni par N_1 ni par N_2, et comme $\frac{N_2(g_n)}{N_1(g_n)} \to +\infty$, N_2 n'est pas dominée non plus par N_1.



d Cas de la dimension finie

Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

Non exigible, admis provisoirement.

Propriété 26 : Convergence coordonnée à coordonnée

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

Démonstration

Il suffit d'utiliser l'équivalence avec la norme infini pour cette base.

IV Topologie des espaces vectoriels normés

On se donne $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

1 Voisinages, ouverts, fermés

a Voisinage

Définition 19 : Voisinage

Soient $a\in E$ et V une partie de E.
On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans V.

Remarque

R 25 – Cela revient à dire qu'on a une distance de sécurité autour de a qui permet de s'en approcher dans toutes les directions en restant dans V.
En particulier, $a\in V$.

Propriété 27 : des voisinages

(i) Si V voisinage de a et $V\subset W$, alors W est un voisinage de a.
(ii) Une réunion non vide quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.
*(iii) Une intersection **finie** de voisinages de a est un voisinage de a.*

Démonstration

(i) Facile.
(ii) Si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille de voisinages de a, pour n'importe quel $j\in I$, $V_j\subset\bigcup_{i\in I}V_i$ donc, d'après la propriété (i), $\bigcup_{i\in I}V_i$ est un voisinage de a.
(iii) Si $V_1,\dots,V_n$ sont des voisinages de a, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $r_i>0$ tel que $B(a,r_i)\subset V_i$. Soit $r=\min_{1\leqslant i\leqslant n}r_i$. Alors $B(a,r)\subset\bigcap_{i\in I}V_i$ qui est un voisinage de a. ■

Remarque

R 26 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les $V_i=\left]-\frac{1}{i},\frac{1}{i}\right[$ sont des voisinages de 0, mais $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}V_i=\{0\}$ n'est pas un voisinage de 0.

Propriété 28 : Voisinages et domination de norme

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2.
Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

Démonstration

On a $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.
Si V est un voisinage de a pour N_1, on a un $r > 0$ tel que $N_1(x-a) < r \Longrightarrow x \in V$.
Alors $N_2(x-a) < \frac{r}{\alpha} \Longrightarrow x \in V$.
Donc V est un voisinage de a pour N_2. ■

b Parties ouvertes

Définition 20 : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tous ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O}, \quad \exists r > 0, \quad B(a,r) \subset \mathcal{O}$.
Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Remarque

R 27 – Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de point « au bord ».

Exemple

E 7 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 8 – Le quart de plan $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\right\}$ est-il un ouvert de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$?

E 9 – Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, alors $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriété 29 : Cas des boules ouvertes

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Démonstration

Si $x \in E$, $r > 0$, $\mathcal{O} = B(x,r)$.
Soit $a \in \mathcal{O}$. Alors $B(a, r - d(x,a)) \subset \mathcal{O}$. En effet, si $d(a,b) < r - d(a,x)$, alors $d(x,b) < d(x,a) + d(a,b) < r$. ■

Propriété 30 : des ouverts

(i) *$\varnothing$, E sont ouverts.*
(ii) *Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*
(iii) *Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.*
(iv) *Un produit **fini** d'ouverts est ouvert* (*pour la norme produit*).

Remarque

R 28 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies, avec le même contre-exemple que pour les voisinages.
Dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ sont ouverts, mais $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$ ne l'est pas.

Démonstration

(i) Facile.

(ii) Si les $\mathcal{O}_i$ pour $i \in I$ sont ouverts, et si $a \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$, alors il existe $j \in i$ tel que $a \in \mathcal{O}_j$ qui est ouvert, $\mathcal{O}_j$ est un voisinage de a et donc $\mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ voisinage de a.

(iii) Si $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, alors pour tout i, $a \in \mathcal{O}_i$ donc les $\mathcal{O}_i$ sont tous voisinages de a, donc leur intersection (finie) l'est encore.

(iv) On traite le cas du produit de deux ouverts. Le cas général se traite de façon similaire.
Si $\mathcal{O}_1$ est un ouvert de (E_1, N_1) et $\mathcal{O}_2$ est un ouvert de (E_2, N_2), montrons que $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est un ouvert de $(E_1 \times E_2, N)$ où N est la norme produit.
Soit $(a_1, a_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Alors on a $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B_1(a_1, r_1) \subset \mathcal{O}_1$ et $B_2(a_2, r_2) \subset \mathcal{O}_2$.
On vérifie alors que $B_N((a_1, a_2), min(r_1, r_2)) \subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$.

■

Propriété 31 : Ouverts et domination de normes

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour N_1 sont des ouverts pour N_2.
Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

Démonstration

Les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2. ■

Remarque

R 29 – On appelle topologie de $(E, \|\cdot\|)$ l'ensemble de ses ouverts.
Si N_1 est dominée par N_2, la topologie pour N_2 possède plus d'ouverts que celle pour N_1. On dit que la topologie pour N_2 est **plus fine** que celle pour N_1.

R 30 – En particulier, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Les notions de voisinages et donc d'ouverts ne dépendant pas du choix de la norme. Ce sera aussi le cas de toutes les notions définies ci-après : fermé, adhérence, intérieur, densité.

Exercice 1 : CCINP 37

C Parties fermées

Définition 21 : Fermé

Une partie F de E est dite **fermée** lorsque son complémentaire F^c est ouvert.

Remarque

R 31 – Intuitivement : bord compris.

R 32 – ⚠ Fermé n'est pas le contraire d'ouvert. On peut être les deux à la fois. Le plus souvent, on n'est ni l'un ni l'autre...

Propriété 32 : Cas des boules fermées

Toute boule fermée est fermée (!)

Démonstration

Soit $F = \overline{B}(a,r)$. $F^c = \{x \in E,\ d(x,a) > r\}$.
Soit $b \in F^c$. On montre que $\overline{B}(b, d(b,a) - r) \subset F^c$.
En effet, si $x \in \overline{B}(b, d(b,a) - r)$, $d(a,x) \geqslant d(a,b) - d(x,b) \geqslant d(a,b) - (d(a,b) - r) = r$ donc $x \in F^c$. ■

Remarque

R 33 – Les singletons sont des fermés.

Propriété 33 : des fermés

(i) *$\varnothing$, E sont fermés.*

(ii) *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*

(iii) *Une réunion **finie** de fermés est fermée.*

(iv) *Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).*

Remarque

R 34 – C'était l'inverse pour les ouverts.

R 35 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des réunions infinies.
Dans $\mathbb{R}$, les $F_i = \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right]$ sont fermés, mais $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} F_i =]-1, 1[$ ne l'est pas.

R 36 – Une partie finie est fermée.

Démonstration

Il suffit de passer au complémentaire et d'utiliser les propriétés des ouverts.
Pour le produit, remarquer que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} E_i \times F_i^c \times \prod_{j=i+1}^{n} E_i\right)$$

qui est une réunion finie de produits finis d'ouverts. ■

Exemple

E 10 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 11 – Si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, alors $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $[a,b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Propriété 34 : Cas des sphères

Toute sphère de E est fermée.

Démonstration

$S(a,r) = \overline{B}(a,r) \cap (B(a,r))^c$ est une intersection de fermés. ■

Propriété 35 : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

Démonstration

($\Longrightarrow$) Si F est fermée, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, $\ell\in E$ sa limite, on suppose, par l'absurde que $\ell\in F^c$, qui est ouvert.
On a donc $r>0$ tel que $B(\ell,r)\subset F^c$.
Or on a un rang à partir duquel $x_n\in B(\ell,r)$ ce qui est contradictoire.

($\Longleftarrow$) Par contraposée, si F n'est pas fermée, F^c n'est pas ouverte, donc on a $\ell\in F^c$ tel que pour tout $r>0$, $B(\ell,r)\not\subset F^c$ ie $B(\ell,r)\cap F\neq\varnothing$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Avec $r=\frac{1}{n+1}$, on a $x_n\in B\left(\ell,\frac{1}{n+1}\right)\cap F$ donc tel que $d(x_n,\ell)\leqslant\frac{1}{n+1}$.
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}$ et $x_n\to\ell\notin F$. ■

Exemple

E 12 – $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2 Adhérence, densité, intérieur

a Points adhérents, adhérence

Remarque

R 37 – Intuitivement, un point adhérent est un point dans A ou « au bord » de A.

Définition 22 : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x\in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque $\forall r>0,\quad B(x,r)\cap A\neq\varnothing$.

Propriété 36 : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration

($\Longrightarrow$) On suppose que x est adhérent à A.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Avec $r=\dfrac{1}{n+1}$, on a $a_n\in B\left(x,\dfrac{1}{n+1}\right)\cap A$ donc tel que $\mathrm{d}(a_n,x)\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.
Cela définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n\to x$.

($\Longleftarrow$) Si on a une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n\to x$, alors pour tout $r>0$, on a un rang à partir duquel $a_n\in B(a,r)\cap A\neq\varnothing$. ■

Définition 23 : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque

R 38 – Attention à la notation : ne pas confondre avec le complémentaire.

R 39 – Intuitivement, « les points de A et les points des bords ».

Exemple

E 13 –

E	A	$\overline{A}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$]0,1]$	$[0,1]$
E	$B(a,r)$	$\overline{B}(a,r)$

Pour la dernière, si $x \in \overline{B(a,r)}$, on a une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $B(a,r)$ telle que $x_n \to a$. Donc pour tout n, $d(x_n,a) < r$ et alors $d(x,a) \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,a) < d(x,x_n) + r$. En passant à la limite, $d(x,a) \leqslant r$, donc $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$.
Réciproquement, si $x \in \overline{B}(a,r)$, soit $x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-a) \to x$ et $x_n \in B(a,r)$ donc, par caractérisation séquentielle, $x \in \overline{B(a,r)}$.
Finalement, $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

Propriété 37 : Croissance

Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Démonstration

Caractérisation séquentielle. ■

Propriété 38 : Caractérisation

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration

$\overline{A}$ est un fermé de E contenant A : Par définition, on a bien $A \subset \overline{A}$. Puis on montre que $\overline{A}^c$ est ouvert.
Si $x \notin \overline{A}$, on a $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \varnothing$. Si $y \in B(x,r)$, $B(y, r - d(x,y)) \cap A = \varnothing$ donc $y \notin \overline{A}$.

Il est plus petit que les autres : Si F est un fermé contenant A, et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A \subset F$ convergente, alors sa limite est dans F donc $\overline{A} \subset F$. ■

Propriété 39 : Caractérisation des fermés

F est un fermé de E si et seulement si $\overline{F} = F$.

Démonstration

Si $F = \overline{F}$, F est fermé d'après ce qui précède.
Si F est fermé, on a déjà $F \subset \overline{F}$.
Puis, si $x \in \overline{F}$, x est limite d'une suite d'éléments de F donc $x \in F$.

Propriété 40 : Cas des sous-espaces et des convexes (HP)

Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ l'est aussi.
Si A est un convexe de E, alors $\overline{A}$ l'est aussi.

Démonstration

Conséquence de la caractérisation séquentielle. ■

Exercice 2 : CCINP 34 **Exercice 3 : CCINP 44** **Exercice 4 : CCINP 45**

b Densité

Définition 24 : Densité

D est **dense** dans E lorsque $\overline{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre D.

Propriété 41 : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'élément de D.

Exemple

E 14 – $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

E 15 – Théorème de Weierstraß : le sous-espace des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),N_\infty)$ (donc a fortiori dans $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),N_1)$ et $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),N_2)$.
Le sous-espace des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}),N_\infty)$ (donc a fortiori dans $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}),N_1)$ et $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}),N_2)$.

c Intérieur

Définition 25 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E, x∈ E.
x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A.
L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété 42 : Croissance

Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Propriété 43 : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Démonstration

$\mathring{A}$ est un ouvert de E contenu dans A : Par définition, on a bien $\mathring{A} \subset A$. Puis, si $x \in \mathring{A}$, on a $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Mais si $y \in B(x,r)$ qui est ouverte, alors $B(x,r)$ est un voisinage de y donc A est un voisinage de y, donc $B(x,r) \subset \mathring{A}$.

Il est plus grand que les autres : Si $\mathscr{O}$ est un ouvert contenu dans A, alors $\mathscr{O}$ est voisinage de tous ses points donc $\mathscr{O} \subset \mathring{A}$. ■

Propriété 44 : Caractérisation des ouverts

$\mathscr{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathring{\mathscr{O}} = \mathscr{O}$.

Démonstration

Si $\mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, alors $\mathcal{O}$ est ouvert d'après ce qui précède.
Puis, d'après la caractérisation, $\mathring{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ et si $\mathcal{O}$ est ouvert, $\mathcal{O} \subset \mathring{\mathcal{O}}$. ■

Exemple

E 16 – $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$: $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'intervalles ouverts non vides.

E 17 – $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}} = B(a,r)$: $B(a,r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}(a,r)$, donc $B(a,r) \subset \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}}$, et $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}} \subset \overline{B}(a,r)$, mais si $x \in S(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$ n'est pas un voisinage de x, donc $x \notin \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}}$ donc $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}} \subset B(a,r)$

d Frontière

Définition 26 : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple

E 18 – $\mathrm{Fr}(B(a,r)) = S(a,r)$.

E 19 – $\mathrm{Fr}([0,1[) = \{0,1\}$.

E 20 – $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Propriété 45 : Caractère fermé

Une frontière est toujours fermée.

Démonstration

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \mathring{A}^c$ est une intersection de fermés donc est fermée. ■

3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

a Voisinage relatif

Définition 27 : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de a dans A** toute partie V' de A s'écrivant $V' = A \cap V$ où V est un voisinage de a, c'est-à-dire telle qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A \subset V'$.

Remarque

R 40 – V' n'est pas nécessairement un voisinage de a dans E.
Par exemple $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un voisinage de 0 dans $[0,1[$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

b Ouverts relatifs

Définition 28 : Ouvert relatif

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de** A (ou **pour la topologie induite sur** A) lorsqu'elle est un voisinage relatif de chacun de ses points.

Remarque

R 41 – $\mathcal{O}'$ ouvert relatif de A si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{O}'$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A \subset \mathcal{O}'$.

Propriété 46 : Caractérisation

$\mathcal{O}'$ de A est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

Exemple

E 21 – $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert de $[0, 1]$.

Remarque

R 42 – Si A est ouvert, les ouverts relatifs de A sont les ouverts.

c Fermés relatifs

Définition 29 : Fermé relatif

Une partie F' de A est un fermé **relatif de** A si son complémentaire **dans A** est un ouvert relatif de A.

Propriété 47 : Caractérisation

F' est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe un fermé F tel que $F' = F \cap A$.

Remarque

R 43 – Si A est fermé, les fermés relatifs de A sont les fermés.

Propriété 48 : Caractérisation séquentielle

Soit F' une partie de A.

*F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant **dans** A a sa limite dans F'.*

Démonstration

Si F' est un fermé relatif de A, alors $F' = F \cap A$ où F est fermé. Si $(x_n) \in F'^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to \ell \in A$, alors comme F est fermé, $\ell \in F$ donc $\ell \in F'$.

Si toute suite d'éléments de F' convergeant dans A a sa limite dans F', soit $F = \overline{F'}$, fermé de E. Montrons que $F' = F \cap A$.

On a déjà $F' \subset F \cap A$. Puis, si $x \in F \cap A = \overline{F'} \cap A$, on a une suite d'éléments de F' convergeant vers $x \in A$ donc $x \in F'$. ∎

d Densité

Définition 30 : Densité dans une partie

Soit B partie de A. B est **dense dans** A si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.