

Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E , sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

1 PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur E** toute forme bilinéaire symétrique définie-positive.

C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) **Bilinéarité**
 - Linéarité à gauche**
Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto (x|y)$ est linéaire sur E
 - Linéarité à droite**
Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto (x|y)$ est linéaire sur E
- (ii) **Symétrie** $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = (y|x)$.
- (iii) **Définie-positivité**
 - Positivité**
 $\forall x \in E, (x|x) \geq 0$;
 - Caractère défini (ou non dégénéré)**
 $\forall x \in E, (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E , on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E , on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

2 Exemples

a Sur \mathbb{R}^n

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Pour des vecteurs x et y de \mathbb{R}^n , avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de \mathbb{R}^n un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur \mathbb{R}^n .

b Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) = \text{tr}(A^T \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $a < b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, | \cdot |)$ un espace préhilbertien réel.

Pour tout vecteur x de E , on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété 1 : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E ,

$$(i) \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

$$(ii) \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$$

(iii) **Identité du parallélogramme (HP)**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Propriété 2 : Identités de polarisation**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E ,

$$(i) \quad (x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$(ii) \quad (x|y) = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

**Inégalité de Cauchy-Schwarz****Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E, \quad (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y) \quad \text{ie} \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$)

**Inégalité triangulaire, norme****Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont **positivement liés** (ie $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y$)

De plus,

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Définition 7 : Norme

On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E toute application $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

Séparation Pour tout $x \in E, N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$.

Homogénéité Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) Pour tout $x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E .

**Distance****Définition 8 : Distance euclidienne et écart angulaire**

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E , on définit :

- la **distance euclidienne** $d(x, y)$ par $d(x, y) = \|x - y\|$,

- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{(x|y)}{\|x\| \|y\|}.$$

Définition 9 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

**ORTHOGONALITÉ****Vecteurs orthogonaux****Définition 10 : Vecteurs orthogonaux**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E .

x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

**Famille orthonormale****Définition 11 : Familles orthogonale et orthonormale**

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$. (v_1, \dots, v_p) est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ avec } i \neq j, \quad (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

(v_1, \dots, v_p) est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

Propriété 4 : orthogonale + non nuls \Rightarrow libre

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n , il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 2 : de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E , une famille orthogonale $(v_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p \geq 3$.

3**Ensembles orthogonaux****Définition 12 : Parties orthogonales**

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E .

On dit que A est **orthogonale** à B si et seulement si $\forall (a, b) \in A \times B, (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

4**Orthogonal d'un sous-espace****Définition 13 : Orthogonal d'un sous-espace**

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E . On définit l'**orthogonal de F** comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall y \in F, (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F .

Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E .

F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.

Si $F = \text{Vect } A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E ,

$$x \in F^\perp \iff \forall a \in A, (x|a) = 0$$

Propriété 8 : de l'orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E .

(i) $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.

(ii) $F \subset (F^\perp)^\perp$,

(iii) La somme est directe : $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$,

(iv) Décroissance : Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$,

(v) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.

**ESPACES OU SOUS-ESPACES EUCLIDIENS**

Rappel : Un espace euclidien est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1**Base orthonormale****Théorème 3 : Existence de base orthonormale**

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

Définition 14 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, et (e_1, \dots, e_n) une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.

2. Par récurrence, pour $j \geq 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$

soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$:

$$\forall i < j, (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$

3. On normalise les vecteurs : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|} \right)$.

Propriété 9 : de la base orthonormalisée

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|} \right)$ est une base orthonormale de E .

Corollaire 3 : Existence de base orthonormale

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

**Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète**

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale**Propriété 10 : Expression en base orthonormale**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormale** de $E : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\forall i \in [1, n], x_i = (e_i | x) \quad (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T \times X} \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Propriété 11 : Changement de base orthonormale

Soit E euclidien, \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases orthonormales.

- (i) Si $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}, P^{-1} = P^T$.
- (ii) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, la formule de changement de bases orthonormales s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

- (iii) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \pm 1 : 1$ si elles ont même orientation, -1 sinon.

3 Isomorphisme avec le dual (MPI)**Théorème 4 : de représentation de Riesz**

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a | x)$. Alors

$$\Psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto \Phi_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a | \cdot)$.

4 Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n .

Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe

Si \mathcal{B} est une base orthonormale **directe** de E , $\det_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de \mathcal{B} .

Définition 15 : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1, \dots, v_n]$, pour $v_1, \dots, v_n \in E$.

Propriété 13 : du produit mixte

- (i) $(v_1, \dots, v_n) \mapsto [v_1, \dots, v_n]$ est une forme n -linéaire alternée sur E .
- (ii) Si (e_1, \dots, e_n) est une **bond**, $[e_1, \dots, e_n] = 1$ et si (e_1, \dots, e_n) est une **boni**, $[e_1, \dots, e_n] = -1$ (réciproque fausse).
- (iii) $[v_1, \dots, v_n] = 0$ si et seulement si (v_1, \dots, v_n) est liée.
- (iv) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $[u(v_1), \dots, u(v_n)] = \det u \times [v_1, \dots, v_n]$.

Propriété 14 : Interprétation géométrique du déterminant

Soit E euclidien orienté.

- (i) Si $\dim E = 2$, $[\vec{u}, \vec{v}]$ représente l'aire orientée du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} .
- (ii) Si $\dim E = 3$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} .

5 Propriétés de F^\perp **Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf**

Si F est un sev de **dimension finie** de E préhilbertien réel, alors

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$$

Le sev F^\perp est alors appelé **supplémentaire orthogonal** de F , il est unique.

Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie

Soit E un espace **euclidien**, F et G des sous-espaces vectoriels de E .

- (i) $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$
- (ii) $(F^\perp)^\perp = F$
- (iii) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- (iv) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

6 Projections et symétries orthogonales**a Projections orthogonales****Définition 16 : Projection orthogonale**

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E de **dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur F** la projection p_F sur F parallèlement à F^\perp .

Propriété 15 : des projections orthogonales

- (i) $p_F \in \mathcal{L}(E)$ (iv) $F^\perp = \text{Ker } p_F$
 (ii) $p_F^2 = p_F$
 (iii) $F = \text{Im } p_F = \text{Ker}(p_F - \text{id}_E)$ (v) $\text{Im } p_F \oplus \text{Ker } p_F = E$
 (vi) $\forall x \in E, p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Propriété 16 : Expression en base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, (e_1, \dots, e_p) une **base orthonormale** de F . Alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$$

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$.
 Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et

$$p_D: x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|}a | x\right) \left(\frac{1}{\|a\|}a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2 \dots$)

- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.

$$p_H: x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$

Propriété 17 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F . Alors

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

b**Symétries orthogonales (MPI)****Définition 17 : Symétrie orthogonale**

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à F** , notée s_F , la symétrie par rapport à F , parallèlement à F^\perp .

Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Propriété 18 : des symétries orthogonales

- (i) $s_F \in \mathcal{L}(E)$ (iv) $\text{Ker}(s_F + \text{id}_E) = F^\perp$
 (ii) $s_F \circ s_F = \text{id}_E$ (v) $s_F = 2p_F - \text{id}_E$.
 (iii) $\text{Ker}(s_F - \text{id}_E) = F$ (vi) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

À savoir retrouver :

- Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de H^\perp .

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2 \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a.$$

7**Distance à un sous-espace**

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E , alors, pour tout $x \in E$,

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Propriété 19 : Expression de la distance à un sevdf

Soit F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E , et $x \in E$.

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si $d(x, F) = \|x - y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormale de F ,

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^p (e_k | x)^2.$$

Si, enfin, F^\perp est aussi de dimension finie et (e_{p+1}, \dots, e_n) une base orthonormale de F^\perp ,

$$d(x, F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^n (e_k | x)^2.$$

**Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$**

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Connaissant une base quelconque de F , on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

Corollaire 6 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal $a : H = (\mathbb{R}a)^\perp$.

Alors, pour tout $x \in E$,

$$d(x, H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

Si $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est une équation de H dans une base orthonormale \mathcal{B} de E et si (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$d(x, H) = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$