

# Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés  $E$ , sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.



## PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

### 1 Définition d'un produit scalaire

#### Définition 1 : Produit scalaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur  $E$**  toute forme bilinéaire symétrique définie-positive.

C'est-à-dire toute application  $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| (i) <b>Bilinéarité</b>          | <b>Linéarité à gauche</b><br>Pour tout $y \in E$ , l'application<br>$x \mapsto (x y)$ est linéaire sur $E$   |
|                                 | <b>Linéarité à droite</b><br>Pour tout $x \in E$ , l'application<br>$y \mapsto (x y)$ est linéaire sur $E$   |
| (ii) <b>Symétrie</b>            | $\forall (x,y) \in E^2, (x y) = (y x).$  |
| (iii) <b>Définie-positivité</b> | <b>Positivité</b><br>$\forall x \in E, (x x) \geqslant 0;$<br><b>Caractère défini</b><br><b>(ou non dégénéré)</b><br>$\forall x \in E, (x x) = 0 \Rightarrow x = 0.$ |

#### Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et si  $(\cdot|\cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ , on dit que  $(E, (\cdot|\cdot))$  est un **espace préhilbertien réel**.

Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et si  $(\cdot|\cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ , on dit que  $(E, (\cdot|\cdot))$  est un **espace euclidien**.

### 2 Exemples

a

Sur  $\mathbb{R}^n$

#### Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$  fait de  $\mathbb{R}^n$  un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur  $\mathbb{R}^n$ .

b

Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

#### Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit

$$(A|B) = \text{tr}(A^T \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$  fait de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

c

Sur  $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

#### Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$  où  $a < b$ , on définit

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

$(\cdot|\cdot)$  fait de  $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$  un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur  $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ .

### 3 Norme euclidienne

a

Définition

#### Définition 6 : Norme euclidienne

Soit  $(E, |\cdot|)$  un espace préhilbertien réel.

Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on pose  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

L'application  $\|\cdot\|$  est appelée **norme euclidienne** sur  $E$  associée au produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$ .

b

Identités remarquables et polarisation

#### Propriété 1 : Identités remarquables

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$$(i) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

$$(ii) \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$$

(iii) **Identité du parallélogramme (HP)**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Propriété 2 : Identités de polarisation**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$$(i) \quad \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$(ii) \quad \langle x | y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

**c****Inégalité de Cauchy-Schwarz****Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle \quad \text{i.e.} \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont liés (i.e.  $y = 0$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$ )

**d****Inégalité triangulaire, norme****Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée  $\|\cdot\|$ . Alors

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont **positivement liés** (i.e.  $y = 0$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y$ )

De plus,

$$\forall x, y \in E, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Définition 7 : Norme**

On appelle **norme** sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  toute application  $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

**Séparation** Pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E$ .

**Homogénéité** Pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ .

**Inégalité triangulaire (ou sous-additivité)** Pour tout  $x, y \in E$ ,  $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ .

**Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme**

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur  $E$ .

**e****Distance****Définition 8 : Distance euclidienne et écart angulaire**

Etant donné des vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace préhilbertien réel  $E$ , on définit :

- la **distance euclidienne**  $d(x, y)$  par  $d(x, y) = \|x-y\|$ ,

- si  $x$  et  $y$  sont non nuls, l'**écart angulaire**  $\theta$  est le réel défini par

$$\theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos \theta = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

**Définition 9 : Distance à une partie non vide**

Si  $A$  est une partie non vide de  $E$  préhilbertien réel, et  $x \in E$ , on définit la distance de  $x$  à  $A$  par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = \inf_{y \in A} \|x-y\|.$$

**II****ORTHOGONALITÉ****1****Vecteurs orthogonaux****Définition 10 : Vecteurs orthogonaux**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel,  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $E$ .

$x$  et  $y$  sont dit **orthogonaux** si et seulement si  $\langle x | y \rangle = 0$ . On écrit parfois  $x \perp y$ .

**2****Famille orthonormale****Définition 11 : Familles orthogonale et orthonormale**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$ .

$(v_1, \dots, v_p)$  est une **famille orthogonale** de  $E$  si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ avec } i \neq j, \quad \langle v_i | v_j \rangle = 0 \quad (\text{i.e. } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \dots, v_p)$  est une **famille orthonormale** de  $E$  si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{i,j}$$

**Propriété 4 : orthogonale + non nuls  $\Rightarrow$  libre**

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.

**Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux**

Si  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$ , il n'existe pas de famille orthogonale de plus de  $n$  vecteurs non nuls.

**Théorème 2 : de Pythagore**

Soit, dans un espace préhilbertien réel  $E$ , une famille orthogonale  $(v_i)_{i \in [1, p]}$ . On a

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si  $p \geq 3$ .

**Propriété 8 : de l'orthogonal**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- (i)  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$ ,
- (ii)  $F \subset (F^\perp)^\perp$ ,
- (iii) La somme est directe :  $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$ ,
- (iv) Décroissance : Si  $F \subset G$ , alors  $G^\perp \subset F^\perp$ ,
- (v)  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$  et  $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$ .

**3 Ensembles orthogonaux****Définition 12 : Parties orthogonales**

Soient  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel et  $A, B$  des parties non vides de  $E$ .

On dit que  $A$  est **orthogonale** à  $B$  si et seulement si  $\forall (a, b) \in A \times B$ ,  $(a|b) = 0$ . On note  $A \perp B$ .

**Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales**

Si  $A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$  sont orthogonales, alors  $A \cap B = \emptyset$  ou  $A \cap B = \{0_E\}$ .

**4 Orthogonal d'un sous-espace****Définition 13 : Orthogonal d'un sous-espace**

Soient  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On définit l'**orthogonal de  $F$**  comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall y \in F, (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté  $F^\circ$ ). Il s'agit de la plus grande partie de  $E$  (pour l'inclusion) orthogonale à  $F$ .

**Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace**

Soient  $(E, (\cdot|\cdot))$  préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice**

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  préhilbertien réel.

Si  $F = \text{Vect } A$  ( $A$  engendre  $F$ ) et si  $x$  est un vecteur de  $E$ ,

$$x \in F^\perp \iff \forall a \in A, (x|a) = 0$$

**ESPACES OU SOUS-ESPACES EUCLIDIENS**

**Rappel** : Un espace euclidien est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

**1 Base orthonormale****Théorème 3 : Existence de base orthonormale**

Tout espace euclidien non réduit à  $0_E$  admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

**Définition 14 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Étant donné  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace euclidien, et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  :

1. On pose  $\varepsilon_1 = e_1$ .
2. Par récurrence, pour  $j \geq 2$ , on cherche des réels  $\lambda_k$  tels que le vecteur

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$

soit orthogonal à tous les  $\varepsilon_i$  pour  $i \in [1, j-1]$  :

$$\forall i < j, (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$

3. On normalise les vecteurs :  $\left( \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|} \right)$ .

**Propriété 9 : de la base orthonormalisée**

On obtient ainsi que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout  $j$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$  et la composante sur  $e_j$  de  $\varepsilon_j$  vaut 1.

On a alors  $\left( \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|} \right)$  est une base orthonormale de  $E$ .

**Corollaire 3 : Existence de base orthonormale**

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.



### Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

## 2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

### Propriété 10 : Expression en base orthonormale

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une **base orthonormale** de  $E$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = (e_i | x) \quad (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T \times X} \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

### Propriété 11 : Changement de base orthonormale

Soit  $E$  euclidien,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  des bases orthonormales.

(i) Si  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ,  $P^{-1} = P^T$ .

(ii) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , la formule de changement de bases orthonormales s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \text{ Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

(iii)  $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \pm 1$  : 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.

## 3 Isomorphisme avec le dual (MPI)

### Théorème 4 : de représentation de Riesz

Soit  $a \in E$  euclidien et  $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$ . Alors

$$\Psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto \Phi_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , il existe un unique élément  $a \in E$  tel que  $\varphi = (a|\cdot)$ .

## 4 Produit mixte

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension  $n$ .

### Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe

Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale **directe** de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}}$  ne dépend pas de  $\mathcal{B}$ .

### Définition 15 : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur  $E$  le déterminant de  $n$  vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note  $[v_1, \dots, v_n]$ , pour  $v_1, \dots, v_n \in E$ .

### Propriété 13 : du produit mixte

- (i)  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto [v_1, \dots, v_n]$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ .
- (ii) Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une bond,  $[e_1, \dots, e_n] = 1$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une boni,  $[e_1, \dots, e_n] = -1$  (réiproque fausse).
- (iii)  $[v_1, \dots, v_n] = 0$  si et seulement si  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée.
- (iv) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $[u(v_1), \dots, u(v_n)] = \det u \times [v_1, \dots, v_n]$ .

### Propriété 14 : Interprétation géométrique du déterminant

Soit  $E$  euclidien orienté.

(i) Si  $\dim E = 2$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}]$  représente l'aire orientée du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

(ii) Si  $\dim E = 3$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  représente le volume orienté du parallélépipède construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

## 5 Propriétés de $F^\perp$

### Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si  $F$  est un sev de **dimension finie** de  $E$  préhilbertien réel, alors

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$$

Le sev  $F^\perp$  est alors appelé **supplémentaire orthogonal** de  $F$ , il est unique.

### Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie

Soit  $E$  un espace **euclidien**,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- (i)  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$
- (ii)  $(F^\perp)^\perp = F$
- (iii)  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- (iv)  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

## 6 Projections et symétries orthogonales

### a Projections orthogonales

#### Définition 16 : Projection orthogonale

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace de  $E$  de **dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur  $F$**  la projection  $p_F$  sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Propriété 15 : des projections orthogonales**

- (i)  $p_F \in \mathcal{L}(E)$
- (ii)  $p_F^2 = p_F$
- (iii)  $F = \text{Im } p_F = \text{Ker}(p_F - \text{id}_E)$
- (iv)  $F^\perp = \text{Ker } p_F$
- (v)  $\text{Im } p_F \oplus \text{Ker } p_F = E$
- (vi)  $\forall x \in E, p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp.$

**Propriété 16 : Expression en base orthonormale**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  préhilbertien réel,  $(e_1, \dots, e_p)$  une **base orthonormale** de  $F$ . Alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$$

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

■ **Projection orthogonale sur une droite** :  $D = \mathbb{R}a$ , où  $a \neq 0_E$ .  
Alors  $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$  est une base orthonormée de  $D$  et

$$p_D: x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|}a|x\right)\left(\frac{1}{\|a\|}a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

(Attention à ne pas oublier le  $\|a\|^2$ ...)

■ **Projection orthogonale sur un hyperplan** :  $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ , où  $a \neq 0_E$ .

$$p_H: x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

**Propriété 17 : Inégalité de Bessel**

Soit  $E$  un espace préhilbertien,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie,  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

**b****Symétries orthogonales (MPI)****Définition 17 : Symétrie orthogonale**

Soit  $E$  un espace préhilbertien,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonale par rapport à  $F$** , notée  $s_F$ , la symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $F^\perp$ .

Si  $F$  est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si  $F$  est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

**Propriété 18 : des symétries orthogonales**

- (i)  $s_F \in \mathcal{L}(E)$
- (ii)  $s_F \circ s_F = \text{id}_E$
- (iii)  $\text{Ker}(s_F - \text{id}_E) = F$
- (iv)  $\text{Ker}(s_F + \text{id}_E) = F^\perp$
- (v)  $s_F = 2p_F - \text{id}_E$ .
- (vi)  $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

À savoir retrouver :

■ Soient  $H$  est un hyperplan d'un espace euclidien  $E$  et  $a$  un vecteur non nul de  $H^\perp$ .

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2 \frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

**7****Distance à un sous-espace**

On a vu que si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel  $E$ , alors, pour tout  $x \in E$ ,

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

**Propriété 19 : Expression de la distance à un sevdé**

Soit  $F$  est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien  $E$ , et  $x \in E$ .

Alors la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte en le projeté orthogonal  $p_F(x)$  de  $x$  sur  $F$ , et seulement en ce vecteur :

$$d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si  $d(x, F) = \|x - y\|$  avec  $y \in F$ , alors  $y = p_F(x)$ .

De plus, si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$ ,

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^p (e_k | x)^2.$$

Si, enfin,  $F^\perp$  est aussi de dimension finie et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $F^\perp$ ,

$$d(x, F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^n (e_k | x)^2.$$

**Méthode 1 : Détermination pratique de  $p_F(x)$** 

Plutôt que de calculer une b.o.n. de  $F$  (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que  $p_F(x)$  est le seul vecteur de  $y \in F$  tel que  $x - y \in F^\perp$ .

Connaissant une base quelconque de  $F$ , on décompose  $y$  dans cette base et on traduit l'orthogonalité de  $x - y$  à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve  $y = p_F(x)$ .

**Corollaire 6 : Distance à un hyperplan**

Soit  $E$  un espace euclidien,  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $a$  :  $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ .

Alors, pour tout  $x \in E$ ,

$$d(x, H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  est une équation de  $H$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  et si  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $x$  dans cette base, alors

$$d(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

À savoir retrouver :

■ Soient  $H$  est un hyperplan d'un espace euclidien  $E$  et  $a$  un vecteur non nul de  $H^\perp$ .

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2 \frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$