

Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E , sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.



PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.
On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie-positive.

C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- | | | |
|---|---|---|
| (i) Bilinéarité | { | Linéarité à gauche |
| | | $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto (x y)$ |
| | | est linéaire sur E |
| | | Linéarité à droite |
| | | $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto (x y)$ |
| | | est linéaire sur E |
| (ii) Symétrie $\forall (x, y) \in E^2, (x y) = (y x)$. | | |
| (iii) Définie-positivité | { | Positivité |
| | | $\forall x \in E, (x x) \geq 0$; |
| | | Caractère défini (ou non dégénéré) |
| | | $\forall x \in E, (x x) = 0 \Rightarrow x = 0$. |

Remarque

- R1** – Ne pas oublier de commencer par vérifier que le produit scalaire est bien **défini** (pas au sens défini-positif!) lorsque cela n'est pas évident.
- R2** – Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.
- R3** – La définie-positivité se résume par $\forall x \neq 0, (x|x) > 0$

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E , on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E , on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Remarque

- R4** – Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.
- R5** – On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y \rangle$ ou $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y \dots$

Exercice 1 : Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Exemples



Sur \mathbb{R}^n

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Pour des vecteurs x et y de \mathbb{R}^n , avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de \mathbb{R}^n un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur \mathbb{R}^n .

Remarque

- R6** – **Important** : Si X et Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et de y dans la base canonique, on remarque que $(x|y) = X^T \times Y$.
- R7** – Dans \mathbb{R}^2 , $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
Dans \mathbb{R}^3 , $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Remarque

- R8** – On peut toujours fabriquer sur le modèle de \mathbb{R}^n un produit scalaire « canonique » sur E de dimension finie rendant une base canonique (s'il y en a une) orthonormale. Et



même, plus généralement, un produit scalaire rendant une base donnée orthonormale.

Par exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, $(P|Q) =$

b Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

R 9 – Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^{n^2} .

c Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $a < b$, on définit

$$(f|g) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Remarque

R 10 – Attention, avec des fonctions continues par morceaux seulement, on a presque un produit scalaire : c'est une forme bilinéaires symétrique positive, il manque seulement $(f|g) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Exercice 2 : HP mais Classique

Si I est un intervalle, on note $\mathcal{L}^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable.

À partir de l'inégalité classique $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$, montrer la bonne définition de $(f|g) = \int_I fg$, que $\mathcal{L}^2(I)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I)$.

Exercice 3 : HP mais Classique

Montrer que l'on définit de la même manière un produit scalaire sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire des suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n^2$

et $\sum v_n^2$ convergente, en prouvant que $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et en posant

$$(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, | \cdot |)$ un espace préhilbertien réel.

Pour tout vecteur x de E , on pose $\|x\| = \sqrt{|x|}$.

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Remarque

R 11 – La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

Exemple

E 1 – Sur \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. En particulier, sur \mathbb{R} ,

$$\|x\| = |x|.$$

E 2 – Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T \times A)}$.

E 3 – Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$.

b**Identités remarquables et polarisation****Propriété 1 : Identités remarquables**

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Pour tous vecteurs x et y de E ,

(i) $\|x + y\|^2 =$

(ii) $\|x - y\|^2 =$

(iii) **Identité du parallélogramme (HP)**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 =$$

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E ,

(i) $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \\ \langle x + y | x + y \rangle - \langle x - y | x - y \rangle \end{array} \right)$

(ii) $\langle x | y \rangle = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ \langle x + y | x + y \rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 \end{array} \right)$

c**Inégalité de Cauchy-Schwarz****Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle \quad \text{ie} \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$)

Remarque

R 12 – L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

Exemple

E 4 – Sur \mathbb{R}^n , $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$.

E 5 – Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\left(\int_a^b f g \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Exercice 4 : CCINP 76, 79**d****Inégalité triangulaire, norme****Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont **positivement liés** (ie $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y$)

De plus,

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Définition 7 : Norme**

On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

Séparation

Homogénéité

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité)

Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E .

**Distance****Définition 8 : Distance euclidienne et écart angulaire**

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E , on définit :

- la **distance euclidienne** $d(x, y)$ par $d(x, y) =$
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos \theta =$$

Remarque

R 13 – La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

R 14 – Autrement dit, $(x|y) = \|x\| \|y\| \cos \theta$.

Définition 9 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

$$d(x, A) =$$

Remarque

R 15 – La borne inférieure existe toujours car $\mathcal{E}_x = \{\|x - y\| ; y \in A\}$ est non vide (car A l'est) et minoré (par 0).

**ORTHOGONALITÉ****1****Vecteurs orthogonaux****Définition 10 : Vecteurs orthogonaux**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E .
 x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Remarque

R 16 – 0_E est orthogonal à tout vecteur.

R 17 – La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

2**Famille orthonormale****Définition 11 : Familles orthogonale et orthonormale**

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$.
 (v_1, \dots, v_p) est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ avec } i \neq j, (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

(v_1, \dots, v_p) est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

Propriété 4 : orthogonale + non nuls \Rightarrow libre

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.

Remarque

R 18 – C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n , il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 2 : de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E , une famille orthogonale $(v_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p \geq 3$.

3 Ensembles orthogonaux**Définition 12 : Parties orthogonales**

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E . On dit que A est **orthogonale** à B si et seulement si $\forall (a, b) \in A \times B, (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

Remarque

R 19 – Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$: leur somme est directe.

Exemple

E 6 – Parties de \mathbb{R}^3 orthogonales d'intersection vide : $A = \mathbb{R}(0, 0, 1)$ et $B = (0, 1, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 0)$.

4 Orthogonal d'un sous-espace**Définition 13 : Orthogonal d'un sous-espace**

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E . On définit l'**orthogonal de F** comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall y \in F, (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F .

Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E . F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel. Si $F = \text{Vect } A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E ,

$$x \in F^\perp \iff \forall a \in A, (x|a) = 0$$

Remarque

R 20 – En particulier, connaissant une base de F , il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à F .

**Propriété 8 : de l'orthogonal**

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E .

- (i) $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
- (ii) $F \subset (F^\perp)^\perp$,
- (iii) La somme est directe : $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$,
- (iv) Décroissance : Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$,
- (v) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.

Remarque

R 21 – Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

R 22 – Pour $F \subset (F^\perp)^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$, on verra que les inclusions sont des égalités si on ajoute une hypothèse de dimension finie sur E .

On peut donner comme contre-exemples, dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. C'est un exercice très classique de montrer que $F^\perp = \{0\}$ à l'aide du théorème de Weierstrass, donc $(F^\perp)^\perp = E$ et

$$F \subsetneq (F^\perp)^\perp = E.$$

Si, de plus, $G = \{t \mapsto P(t) \sin(t) ; P \in F\}$, alors $G^\perp = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$ d'où

$$E = (F \cap G)^\perp \supsetneq F^\perp + G^\perp = \{0\}.$$

Exercice 5 : CCINP 39**ESPACES OU SOUS-ESPACES EUCLIDIENS**

Rappel : Un espace euclidien est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale**Théorème 3 : Existence de base orthonormale**

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Redécouvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

Exemple

E 7 – Dans \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$.

Il est facile de voir que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).

On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

■ On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0, 1, 1)$.

■ Puis on cherche

$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda \varepsilon_1$$

avec λ tel que $(\varepsilon_1 | \varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1 | e_2) + \lambda(\varepsilon_1 | \varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

■ En cherchant

$$\varepsilon_3 = e_3 + \mu \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2$$

tel que $(\varepsilon_1 | \varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2 | \varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de \mathbb{R}^3 . Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n.

$$\varepsilon'_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \varepsilon'_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ et } \varepsilon'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Définition 14 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien, et (e_1, \dots, e_n) une base de E :

- On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
- Par récurrence, pour $j \geq 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$

soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$:

$$\forall i < j, (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$

- On normalise les vecteurs : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Remarque

R 23 – Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure.

Propriété 9 : de la base orthonormalisée

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j , $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une base orthonormale de E .

Remarque

R 24 – Matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_n) à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (qui est seulement orthogonale) :

À la base de la décomposition QR (exercice classique, cf TD).

Corollaire 3 : Existence de base orthonormale

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

2**Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale****Propriété 10 : Expression en base orthonormale**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormale** de E :
 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = (e_i | x)$$

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T \times X}$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Propriété 11 : Changement de base orthonormale

Soit E euclidien, \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases orthonormales.


(i) Si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $P^{-1} =$

(ii) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, la formule de changement de bases orthonormales s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) =$$

(iii) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \pm 1$: 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.

Remarque

R 25 –  La réciproque est fautive, il ne suffit pas que ce déterminant vale ± 1 pour que les bases soient orthonormales.

R 26 – Faciles, les changements de bases orthonormales!!!



3 Isomorphisme avec le dual (MPI)

Théorème 4 : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto \Phi_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

4 Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n .

Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe

Si \mathcal{B} est une base orthonormale **directe** de E , $\det_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de \mathcal{B} .

Définition 15 : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1, \dots, v_n]$, pour $v_1, \dots, v_n \in E$.

Propriété 13 : du produit mixte

- (i) $(v_1, \dots, v_n) \mapsto [v_1, \dots, v_n]$ est une forme n -linéaire alternée sur E .
- (ii) Si (e_1, \dots, e_n) est une base, $[e_1, \dots, e_n] = 1$ et si (e_1, \dots, e_n) est une base, $[e_1, \dots, e_n] = -1$ (réciproque fausse).
- (iii) $[v_1, \dots, v_n] = 0$ si et seulement si (v_1, \dots, v_n) est liée.
- (iv) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $[u(v_1), \dots, u(v_n)] = \det u \times [v_1, \dots, v_n]$.

Remarque

R27 – Comme, si E est de dimension 3 et $x, y \in E$, $[x, y, \cdot] \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, avec l'isomorphisme de la partie précédente, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $z \in E$, $[x, y, z] = (a|z)$. Ce vecteur a est appelé **produit vectoriel** de x et y , noté $x \wedge y$. On a alors $[x, y, z] = (x \wedge y|z)$ d'où l'appellation produit mixte.

Propriété 14 : Interprétation géométrique du déterminant

Soit E euclidien orienté.

- (i) Si $\dim E = 2$, $[\vec{u}, \vec{v}]$ représente l'aire orientée du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} .
- (ii) Si $\dim E = 3$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

Démonstration

C'est évident si \vec{u}, \vec{v} (respectivement $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) sont liés. Sinon :

- (i) Si $\dim E = 2$, soit (e_1, e_2) base orthonormale obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de (\vec{u}, \vec{v}) . Alors $\vec{u} = ce_1$ et $\vec{v} = de_1 + he_2$, où h hauteur et c côté, donc $[\vec{u}, \vec{v}] = ch[e_1, e_2] = \pm ch$ aire orientée du parallélogramme.
- (ii) Si $\dim E = 3$, soit (e_1, e_2, e_3) base orthonormale obtenue par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Alors $\vec{u} = ce_1$, $\vec{v} = de_1 + he_2$ et $\vec{w} = xe_1 + ye_2 + He_3$, où H hauteur et ch aire de la base. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = chH[e_1, e_2, e_3] = \pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

5 Propriétés de F^\perp

Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si F est un sev de **dimension finie** de E préhilbertien réel, alors

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$$

Le sev F^\perp est alors appelé **supplémentaire orthogonal** de F , il est unique.

Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie

Soit E un espace **euclidien**, F et G des sous-espaces vectoriels de E .

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (i) $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ | (iii) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ |
| (ii) $(F^\perp)^\perp = F$ | (iv) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ |

Remarque

R 28 – On retiendra qu'**en dimension finie**, il n'y a plus trop de problème.

Exercice 6 : CCINP 77, 92**6 Projections et symétries orthogonales****a Projections orthogonales****Définition 16 : Projection orthogonale**

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur F** la projection p_F sur F parallèlement à F^\perp .

Remarque

R 29 – Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^\perp$.

Propriété 15 : des projections orthogonales

- | | |
|--|---|
| (i) $p_F \in \mathcal{L}(E)$ | (iv) $F^\perp = \text{Ker } p_F$ |
| (ii) $p_F^2 = p_F$ | |
| (iii) $F = \text{Im } p_F = \text{Ker } (p_F - id_E)$ | (v) $\text{Im } p_F \oplus \text{Ker } p_F = E$ |
| (vi) $\forall x \in E, p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp.$ | |

Remarque

R 30 – Le projeté orthogonal de $x \in E$ est le seul vecteur $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Pratique pour le trouver !

Exercice 7 : CCINP 80**Propriété 16 : Expression en base orthonormale**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, (e_1, \dots, e_p) une **base orthonormale** de F . Alors

Remarque

R 31 – On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ i.e.

$$e_j = \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k. \quad (1)$$

Donc, si l'on note $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$, (1) est la décomposition de e_j dans $F^\perp \oplus F$. Donc

$$\varepsilon_j = p_{F^\perp}(e_j) \text{ et } - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k = p_F(e_j).$$

De plus, ici $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de F , donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_{j-1}}{\|\varepsilon_{j-1}\|} \right)$ en est

une b.o.n. et $p_F(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \middle| e_j \right) \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\varepsilon_k | e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2} \varepsilon_k$, d'où l'expression des λ_k que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|} a \right)$ est une base orthonormée de D et

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2 \dots$)

- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.

**Exemple**

Ex 8 – Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Quelle est la matrice dans \mathcal{B} de p_P ?

Remarque

R 32 – Si \mathcal{B} (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de \mathcal{B} forment une base de $F = \text{Im}(p_F)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n - p$ autres forment une base de $F^\perp = \text{Ker } p_F$ et nous donnent les $n - p$ dernières colonnes nulles.

Propriété 17 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F . Alors

b**Symétries orthogonales (MPI)****Définition 17 : Symétrie orthogonale**

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à F** , notée s_F , la symétrie par rapport à F , parallèlement à F^\perp .

Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Propriété 18 : des symétries orthogonales

(i) $s_F \in \mathcal{L}(E)$

(ii) $s_F \circ s_F = \text{id}_E$

(iii) $\text{Ker}(s_F - \text{id}_E) = F$

(iv) $\text{Ker}(s_F + \text{id}_E) = F^\perp$

(v) $s_F = 2p_F - \text{id}_E$.

(vi) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

Exemple

Ex 9 – Symétrie orthogonale par rapport au plan P de l'exemple précédent.

Remarque

R 33 – Si \mathcal{B} (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -1 \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de \mathcal{B} forment une base de $F = \text{Ker}(s_F - \text{id})$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n - p$ autres forment une base de $F^\perp = \text{Ker}(s_F + \text{id})$ et nous donnent les $n - p$ dernières colonnes avec des -1 sur la diagonale.

À savoir retrouver :

■ Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de H^\perp .

7 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E , alors, pour tout $x \in E$,

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Propriété 19 : Expression de la distance à un sevdf

Soit F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E , et $x \in E$.

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si $d(x, F) = \|x - y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormale de F ,

$$d(x, F)^2 =$$

Si, enfin, F^\perp est aussi de dimension finie et (e_{p+1}, \dots, e_n) une base orthonormale de F^\perp ,

$$d(x, F)^2 =$$



Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de F tel que $x - y \in F^\perp$.

Connaissant une base quelconque de F , on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

Remarque

R 34 – Si F n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $d(\exp, F)$ n'est pas atteinte car

on peut montrer que $d\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi,

dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles?).

On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $d(x, F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x - y \in F^\perp$ et on peut montrer que si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 8 : CCINP 81, 82

Corollaire 6 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal a : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$.

Alors, pour tout $x \in E$,

$$d(x, H) =$$

Si $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est une équation de H dans une base orthonormale \mathcal{B} de E et si (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$d(x, H) =$$