19

Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Table des matières

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.
C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité**
- **Linéarité à gauche**
  Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto (x|y)$ est linéaire :
  $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x_1 + \lambda x_2|y) = (x_1|y) + \lambda(x_2|y).$
- **Linéarité à droite**
  Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto (x|y)$ est linéaire :
  $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x|y_1 + \lambda y_2) = (x|y_1) + \lambda(x|y_2).$

(ii) **Symétrie** $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x).$

(iii) **Définie-positivité**
- **Positivité**
  $\forall x \in E, \quad (x|x) \geqslant 0\,;$
- **Caractère défini (ou non dégénéré)**
  $\forall x \in E, \quad (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Remarque

R 1 – Ne pas oublier de commencer par vérifier que le produit scalaire est bien **défini** (pas au sens défini-positif !) lorsque cela n'est pas évident.

R 2 – Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.

R 3 – La définie-positivité se résume par $\forall x \neq 0, \quad (x|x) > 0$

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Remarque

R 4 – Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.

R 5 – On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y\rangle$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$...

Exercice 1 : Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque

R6 – **Important** : Si X et Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et de y dans la base canonique, on remarque que $(x|y) = X^\mathsf{T} \times Y$.

R7 – Dans $\mathbb{R}^2$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
Dans $\mathbb{R}^3$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall\, x, x', y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x + \lambda x' | y) &= \sum_{i=1}^{n} (x + \lambda x')_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda x'_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \\ &= (x|y) + \lambda (x'|y).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$
- $(x|x) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff \forall\, i, \quad x_i = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Remarque

R8 – On peut toujours fabriquer sur le modèle de $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire « canonique » sur E de dimension finie rendant une base canonique (s'il y en a une) orthonormale. Et même, plus généralement, un produit scalaire rendant une base donnée orthonormale.

Par exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, $(P|Q) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k q_k$ avec des notations évidentes.

b Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

R 9 – Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Démonstration

$$\mathrm{tr}(A^\top \times B) = \sum_{i=1}^n (A^\top \times B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$

■

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Remarque

R 10 – Attention, avec des fonctions continues par morceaux seulement, on a presque un produit scalaire : c'est une forme bilinéaires symétrique positive, il manque seulement $(f|g)=0 \Longrightarrow f=0$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall f,\tilde{f},g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f+\lambda\tilde{f}|g) &= \int_a^b (f+\lambda\tilde{f})\,g \\ &= \int_a^b (fg+\lambda\tilde{f}g) \\ &= \int_a^b fg + \lambda\int_a^b \tilde{f}g \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= (f|g)+\lambda(\tilde{f}|g).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \ (f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale et comme $a<b$)
- $$(f|f)=0 \iff \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
  $\iff f^2 \equiv 0$ (car f^2 est une fonction continue et positive)
  $\iff f\equiv 0$ ■

Exercice 2 : HP mais Classique

Si I est un intervalle, on note $\mathscr{L}^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable.

À partir de l'inégalité classique $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2)$, montrer la bonne définition de $(f|g) = \int_I fg$, que $\mathscr{L}^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{L}^2(I)$.

Exercice 3 : HP mais Classique

Montrer que l'on définit de la même manière un produit scalaire sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, c'est-à- dire des suites $u,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergente, en prouvant que $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et en posant $(u|v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E,|\ )$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur x de E, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Remarque

R 11 – La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

Exemple

E 1 – Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$. En particulier, sur $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$.

E 2 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top \times A)}$.

E 3 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété 1 : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ (*ii*) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

(*iii*) ***Identité du parallélogramme*** (*HP*)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (*ii*) $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

Démonstration

Provient directement de l'identité remarquable (i) et de $(i)-(ii)$. ■

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall\, x,y \in E,\quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y) \qquad \textit{ie} \qquad \left|(x|y)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\,\lambda \in \mathbb{R},\quad x=\lambda y$)

Remarque

R 12 – L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

Démonstration

Soit λ un nombre réel. On pose $P(\lambda) = (x+\lambda y|x+\lambda y)$: on a que $P(\lambda) \geqslant 0$ par positivité.
Or

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) \\ &= (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

Cas 1 : Si $(y|y)=0$, alors on doit avoir, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x|x)+2\lambda(x|y) \geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $(x|y)=0$ et l'inégalité est vraie.

Cas 2 : Sinon, le polynôme en λ est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leqslant 0$$

et on obtient l'inégalité recherchée.

Cas d'égalité :
Si $y = 0$, il y a égalité.
Si $y \neq 0$, il y a égalité si et seulement si $P(\lambda)$ admet une racine (double) si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x+\lambda y | x + \lambda y) = 0$, ce qui équivaut à $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x + \lambda y = 0$ et donc x et y sont liés. ■

Exemple

E4 – Sur $\mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_i^2 \sum_{k=1}^{n} y_i^2$. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Exercice 4 : CCINP 76, 79

d Inégalité triangulaire, norme

Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski

Soit $(E, |\ )$ *un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée* $\|\cdot\|$. *Alors*

$$\forall x, y \in E,\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x *et* y *sont* ***positivement liés*** (*ie* $y = 0$ *ou* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$)
De plus,

$$\forall x, y \in E,\quad \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration

Soient x et y des vecteurs de E.
Il est plus pratique de travailler avec le carré des normes :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \\
&= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Cas d'égalité : Il y a égalité ssi $(x|y) = |(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$
Donc si et seulement si soit $y = 0$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) et $(x|y) = |(x|y)|$, ce qui devient, si $x = \lambda y$, $\lambda (x|x) = |\lambda|\,(x|x)$ donc $\lambda = |\lambda|$ et $\lambda \geqslant 0$.

Pour l'autre inégalité, on écrit que $\|(x+y) - y\| \leqslant \|x+y\| + \|-y\|$ donc $\|x+y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$, puis on échange les rôles de x et y. ■

Définition 7 : Norme

On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

Séparation Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bonne définition $\|x\|$ est un réel positif bien défini.

Séparation $\|x\| = 0 \iff \|x\|^2 = 0 \iff (x|x) = 0 \iff x = 0_E$

Homogénéité $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda| \, \|x\|$

Inégalité triangulaire c'est l'inégalité de Minkowski démontrée ci-dessus. ■

e Distance

Définition 8 : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x, y)$ par $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Remarque

R 13 – La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

R 14 – Autrement dit, $(x|y) = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$.

Définition 9 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x, y) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Remarque

R 15 – La borne inférieure existe toujours car $\mathscr{E}_x = \left\{ \|x - y\| \; ; \; y \in A \right\}$ est non vide (car A l'est) et minoré (par 0).

CC BY NC SA

II Orthogonalité

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 10 : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.
x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y)=0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Remarque

R 16 – 0_E est orthogonal à tout vecteur.

R 17 – La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

2 Famille orthonormale

Définition 11 : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1,\dots,v_p)\in E^p$.
$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall\, i,j\in [\![1,p]\!],\ \text{avec } i\neq j,\quad (v_i|v_j)=0 \quad (\text{ie } v_i\perp v_j).$$

$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall\, i,j\in [\![1,p]\!],\quad (v_i|v_j)=\delta_{i,j}$$

Propriété 4 : orthogonale + non nuls ⇒ libre

Toute famille orthogonale *de vecteurs* non nuls (*en particulier toute famille orthonormale*) *d'un espace préhilbertien réel est libre.*

Remarque

R 18 – C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

Démonstration

Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E.
But : $(v_1,\dots,v_p)$ est libre.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p=0$.

Alors, si $i\in[\![1,p]\!]$, $(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p|v_i)=\begin{cases}(0_E|v_i)=0_{\mathbb{R}}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(v_j|v_i)=\lambda_i\,\|v_i\|^2\end{cases}$. Or $v_i\neq 0_E$, donc $\lambda_i=0$. ■

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 2 : de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p \geqslant 3$.

Démonstration

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$
Puis récurrence sur p.
Contre-exemple : la famille $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{-1}\}$ n'est pas orthogonale (et pour cause, il y 3 vecteurs non nuls en dimension 2 !) et vérifie pourtant la propriété de Pythagore. ■

3 Ensembles orthogonaux

Définition 12 : Parties orthogonales

Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E.
On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall (a,b) \in A\times B,\ \ (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A\cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

Démonstration

Si $A\cap B \neq \varnothing$, soit $x \in A\cap B$. Alors $(x|x) = 0$, donc $x = 0$. ■

Remarque

R 19 – Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors $F\cap G = \{0_E\}$: leur somme est directe.

Exemple

E 5 – Parties de $\mathbb{R}^3$ orthogonales d'intersection vide : $A = \mathbb{R}(0,0,1)$ et $B = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,0,0)$.

4 Orthogonal d'un sous-espace

Définition 13 : Orthogonal d'un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E. On définit l'**orthogonal de** F comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\, y \in F,\quad (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^{\perp} \iff x \in E \text{ et } \forall\, y \in F,\quad (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F.

Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectorielde E.
$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

- $0_E \in A^{\perp}$,
- $\forall\, x, x' \in A^{\perp},\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\quad \lambda x + x' \in A^{\perp}$, car $\forall\, y \in A,\quad (\lambda x + x'|y) = \lambda(x|y) + (x'|y) = 0$.

Donc $A^{\perp}$ est un sev de A.

Comme de plus $A \subset \operatorname{Vect} A$, $(\operatorname{Vect} A)^{\perp} \subset A^{\perp}$ et être orthogonal à tout élément de A implique être orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de A par bilinéarité du produit scalaire, donc $A^{\perp} \subset (\operatorname{Vect} A)^{\perp}$.

Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.
Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^{\perp} \iff \forall\, a \in A,\quad (x|a) = 0$$

Démonstration

$F^{\perp} = A^{\perp}$.

Remarque

R 20 – En particulier, connaissant une base de F, il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à F.

Propriété 8 : de l'orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

(i) $E^\perp = \{0\}$ *et* $\{0\}^\perp = E$.

(ii) $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,

(iii) *La somme est directe :* $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

(iv) *Décroissance : Si* $F \subset G$, *alors* $G^\perp \subset F^\perp$,

(v) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ *et* $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.

Démonstration

- $0 \in E^\perp$, et si $x \in E^\perp$, $(x|x) = 0$ donc $\|x\| = 0$ et $x = 0$.
- Si $x \in F$, pour vecteur y de $F^\perp$, $(x|y) = 0$, d'où le résultat.
- Comme les ensembles F et $F^\perp$ sont orthogonaux, $F \cap F^\perp = \varnothing$ ou $F \cap F^\perp = \{0\}$, mais $0 \in F \cap F^\perp$.
- Soit $x \in G^\perp$. Pour tout vecteur y de F, $y \in G$, et donc $(x|y) = 0$. Ainsi $x \in F^\perp$.
-

Remarque

R21 – Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

R22 – Pour $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$, on verra que les inclusions sont des égalités si on ajoute une hypothèse de dimension finie sur E.
On peut donner comme contre-exemples, dans $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. C'est un exercice très classique de montrer que $F^\perp = \{0\}$ à l'aide du théorème de Weierstrass, donc $\left(F^\perp\right)^\perp = E$ et
$$F \subsetneq \left(F^\perp\right)^\perp = E.$$
Si, de plus, $G = \{t \mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P \in F\}$, alors $G^\perp = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$ d'où
$$E = (F \cap G)^\perp \supsetneq F^\perp + G^\perp = \{0\}.$$

Exercice 5 : CCINP 39

III Espaces ou sous-espaces euclidiens

Rappel : Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème 3 : Existence de base orthonormale

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Redécouvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

CC BY NC SA

Exemple

E 6 – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$.
Il est facile de voir que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).
On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

- On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.
- Puis on cherche
$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$$
avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|\mathrm{e}_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- En cherchant
$$\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$$
tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\varepsilon_1' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varepsilon_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\varepsilon_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Définition 14 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur
$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$
soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall\, i < j, \quad (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Remarque

R 23 – Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure.

Propriété 9 : de la base orthonormalisée

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une base orthonormale de E.

Démonstration

- 1^{re} **étape : Orthogonalisation.**
  - **On pose** $\boxed{\varepsilon_1 = e_1.}$ (Et alors $\varepsilon_1 \neq 0_E$.)
  - **On cherche** $\varepsilon_2 \in$ **Vect**(ε_1, e_2) **tel que** $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$.
    On cherche donc un réel λ tel que $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ et $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$.
    Donc $\lambda\|\varepsilon_1\|^2 + (\varepsilon_1|e_2) = 0$, puis $\lambda = -\dfrac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}$.
    Finalement, $\boxed{\varepsilon_2 = e_2 - \dfrac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1.}$
    De plus, $\varepsilon_2 \neq 0$ car (e_1, e_2) est une famille libre, et Vect$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$ Vect(e_1, e_2). (L'inclusion $\subset$ est immédiate, l'inclusion $\supset$ vient du fait qu'on puisse exprimer facilement e_2 comme combinaison linéaire de ε_1 et ε_2 : $e_2 = \varepsilon_2 + \frac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1$.)
  - Supposons, par récurrence, que l'on ait construit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}$ tels que
    - $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
    - pour tout entier $i \in [\![2, j-1]\!]$, Vect$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) =$ Vect$(e_1, \dots, e_i)$
    - pour tout entier $i \in [\![2, j-1]\!]$, la composante de ε_i sur e_i est 1.

    On cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$: $(\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0$.

    Donc, si $i \in [\![1, j-1]\!]$, $(\varepsilon_i|e_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k(\varepsilon_i|\varepsilon_k) = 0$.

    D'où $(\varepsilon_i|e_j) + \lambda_i\|\varepsilon_i\|^2 = 0$, puis $\lambda_i = -\dfrac{(\varepsilon_i|e_j)}{\|\varepsilon_i\|^2}$.

    La récurrence est alors établie avec $\boxed{\varepsilon_j = e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \dfrac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k.}$

    En effet :
    - $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
    - Vect$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j) =$ Vect$(e_1, \dots, e_j)$.
      En effet, Vect$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) =$ Vect$(e_1, \dots, e_{j-1})$, donc l'inclusion $\subset$ est immédiate et l'inclusion $\supset$ vient du fait que l'on puisse exprimer facilement e_j comme combinaison linéaire des ε_i, pour $i \in [\![1, j]\!]$: $e_j = \varepsilon_j + \sum_{k=1}^{j-1} \dfrac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k$.
    - La composante de ε_j sur e_j est 1.

  On obtient n vecteurs non nuls orthogonaux en dimension n : $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une **base orthogonale** *de E.*
- 2^{e} **étape : Normalisation.**
  On obtient alors très facilement un b.o.n. de E :

$$\boxed{\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right).}$$

Remarque

R 24 – Matrice de passage de la base $(e_1,\dots,e_n)$ à la base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ (qui est seulement orthogonale) :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À la base de la décomposition QR (exercice classique, cf TD).

Corollaire 3 : Existence de base orthonormale

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Démonstration

C'est en effet encore un espace euclidien, muni du produit scalaire restreint à ce sous-espace. ■

Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'orthonormalisation de Schmidt à cette famille libre complétée en une base : les vecteurs de la famille orthonormale seront inchangés. ■

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété 10 : Expression en base orthonormale

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ *un espace euclidien et* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *une* **base orthonormale** *de* E : $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ *et* $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$. *Alors*

$$\forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad x_i=(e_i|x) \qquad\qquad (x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top\times Y$$

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}=\sqrt{X^\top\times X} \qquad\qquad \mathrm{d}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Démonstration

- Si $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}(e_i|x) &= \left(e_i\middle|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (e_i|e_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j}\\ &= x_i\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x|y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\middle|\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(e_i\middle|\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i|e_j)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

- $\|x\|^2 = (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, d'après ce qui précède.

Propriété 11 : Changement de base orthonormale

Soit E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.

(i) Si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1} = P^\top$.

(ii) Si $u \in \mathscr{L}(E)$, la formule de changement de bases orthonormales s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^\top\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \pm 1$: 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.

Remarque

R 25 – ⚠ La réciproque est fausse, il ne suffit pas que ce déterminant vale ± 1 pour que les bases soient orthonormales.

R 26 – Faciles, les changements de bases orthonormales !!!

Démonstration

(i) $P_{i,j} = \left(e_i\middle|e'_j\right)$ (coordonnée de e'_j selon e_i.)
$(P^{-1})_{i,j} = \left(e'_i\middle|e_j\right) = \left(e_j\middle|e'_i\right) = P_{j,i} = (P^\top)_{i,j}$.

(ii) Immédiat.

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \det P$ or $PP^\top = I_n$ donc $(\det P)^2 = 1$.

3 Isomorphisme avec le dual (MPI)

Théorème 4 : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

Démonstration

C'est une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie et elle est injective : si pour tout $x \in E$, $(a|x) = (b|x)$ alors $(a-b|a-b) = 0$ donc $a = b$.

C'est donc un isomorphisme. ∎

4 Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.

Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe

*Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale **directe** de E, $\det_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.*

Démonstration

$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' \det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}$. ∎

Définition 15 : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1, \dots, v_n]$, pour $v_1, \dots, v_n \in E$.

Propriété 13 : du produit mixte

(i) $(v_1, \dots, v_n) \mapsto [v_1, \dots, v_n]$ *est une forme n-linéaire alternée sur E.*

(ii) *Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une bond, $[e_1, \dots, e_n] = 1$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une boni, $[e_1, \dots, e_n] = -1$ (réciproque fausse).*

(iii) $[v_1, \dots, v_n] = 0$ *si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est liée.*

(iv) *Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $[u(v_1), \dots, u(v_n)] = \det u \times [v_1, \dots, v_n]$.*

Remarque

R 27 – Comme, si E est de dimension 3 et $x, y \in E$, $[x, y, \cdot] \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, avec l'isomorphisme de la partie précédente, il existe une unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $z \in E$, $[x, y, z] = (a|z)$. Ce vecteur a est appelé **produit vectoriel** de x et y, noté $x \wedge y$.

On a alors $[x, y, z] = (x \wedge y|z)$ d'où l'appellation produit mixte.

Propriété 14 : Interprétation géométrique du déterminant

Soit E euclidien orienté.

(i) *Si $\dim E = 2$, $[\vec{u}, \vec{v}]$ représente l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\dim E = 3$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*

Démonstration

C'est évident si $\vec{u}, \vec{v}$ (respectivement $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) sont liés. Sinon :

(i) Si $\dim E = 2$, soit (e_1, e_2) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors $\vec{u} = ce_1$ et $\vec{v} = de_1 + he_2$, où h hauteur et c côté, donc $[\vec{u}, \vec{v}] = ch[e_1, e_2] = \pm ch$ aire orientée du parallélogramme.

(ii) Si $\dim E = 3$, soit (e_1, e_2, e_3) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Alors $\vec{u} = ce_1$, $\vec{v} = de_1 + he_2$ et $\vec{w} = xe_1 + ye_2 + He_3$, où H hauteur et ch aire de la base. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = chH[e_1, e_2, e3] = \pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

5 Propriétés de $F^\perp$

Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si F est un sev de **dimension finie** *de E préhilbertien réel, alors*

$$E = F \oplus F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

Le sev $F^\perp$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** *de F, il est unique.*

Démonstration

- Si $F = \{0_E\}$, on a vu que $F^\perp = E$ et alors le résultat est immédiat.
- De même, si $F = E$, on a vu que $F^\perp = \{0_E\}$ et alors le résultat est immédiat.
- Sinon, on a déjà que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

  De plus, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F, et $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i \in F$, $x = y + (x-y)$ avec $x - y \in F^\perp$ car pour tout i, $(x - y|e_i) = 0$.
  D'où le résultat.

  Unicité : Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors F et G sont orthogonaux, donc, si E est de dimension finie, $G \subset F^\perp$ et $\dim G = \dim E - \dim F = \dim F^\perp$, donc $G = F^\perp$.
  Si E n'est pas de dimension finie ? si $x \in F^\perp$, $x = x_F + x_G$ et $x_F = x - x_G \in F \cap F^\perp = \{0_E\}$ donc $x = x_G \in G$ et $G = F^\perp$.

Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie

Soit E un espace ***euclidien****, F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(*i*) $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$

(*ii*) $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

(*iii*) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

(*iv*) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Remarque

R 28 – On retiendra qu'**en dimension finie**, il n'y a plus trop de problème.

Démonstration

(i) : Vu dans la précédente démonstration.

(ii) : Une inclusion connue et dimensions.

(iii) et (iv) : $F^\perp \overset{\perp}{\oplus} F = E$: unicité du supplémentaire orthogonal de $F^\perp$.
$F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ est direct.
Donc $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. (Vrai même s'ils ne sont pas de dimension finie.)
Puis $(F \cap G)^\perp = \left(F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}\right)^\perp = \left((F^\perp + G^\perp)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 6 : CCINP 77, 92

6 Projections et symétries orthogonales

a Projections orthogonales

Définition 16 : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.
On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque

R 29 – Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^\perp$.

Propriété 15 : des projections orthogonales

(i) $p_F \in \mathscr{L}(E)$

(ii) $p_F^2 = p_F$

(iii) $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$

(iv) $F^\perp = \operatorname{Ker} p_F$

(v) $\operatorname{Im} p_F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p_F = E$

(vi) $\forall x \in E, \quad p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Remarque

R 30 – Le projeté orthogonal de $x \in E$ est le seul vecteur $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Pratique pour le trouver !

Exercice 7 : CCINP 80

Propriété 16 : Expression en base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_p)$ une ***base orthonormale*** *de F. Alors*

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$$

Démonstration

D'après la démonstration du supplémentaire orthogonal.

Remarque

R 31 – On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ i.e.

$$e_j = \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k. \qquad (1)$$

Donc, si l'on note $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1})$, (1) est la décomposition de e_j dans $F^\perp \oplus F$. Donc $\varepsilon_j = p_{F^\perp}(e_j)$ et $-\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k = p_F(e_j)$.

De plus, ici $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de F, donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \frac{\varepsilon_{j-1}}{\|\varepsilon_{j-1}\|}\right)$ en est une b.o.n. et $p_F(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \middle| e_j\right) \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2} \varepsilon_k$, d'où l'expression des λ_k que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|} a\right)$ est une base orthonormée de D et
$$p_D : x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|} a \middle| x\right) \left(\frac{1}{\|a\|} a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$
(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.
$$p_H : x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$

Démonstration

Pour la projection sur un hyperplan, si on nomme D la droite $\mathbb{R}a = H^\perp$, on a que $E = H \overset{\perp}{\oplus} D$ et
$$id_E = p_H + p_D = p_H + \frac{(a|\cdot)}{\|a\|^2} a. \quad \blacksquare$$

Exemple

E 7 – Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de p_P ? Vecteur normal à P : $(1, 0, -1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x, y, z)\big) = (x, y, z) - \frac{(1, 0, -1) \cdot (x, y, z)}{2} (1, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, $p_P(e2) = e_2$ et $p_P(e3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CC BY NC SA

Remarque

R 32 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \mathrm{Im}(p_F)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^{\perp} = \mathrm{Ker}\, p_F$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes nulles.

Propriété 17 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x \in E, \quad \left\| p_F(x) \right\| \leqslant \|x\|$$

Démonstration

C'est le théorème de Pythagore : $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$ donc

$$\|x\|^2 = \left\| p_F(x) \right\|^2 + \left\| x - p_F(x) \right\|^2 \geqslant \left\| p_F(x) \right\|^2.$$

■

b Symétries orthogonales (MPI)

Définition 17 : Symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à** F, notée s_F, la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^{\perp}$.

Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Propriété 18 : des symétries orthogonales

(i) $s_F \in \mathscr{L}(E)$

(ii) $s_F \circ s_F = \mathrm{id}_E$

(iii) $\mathrm{Ker}\,(s_F - \mathrm{id}_E) = F$

(iv) $\mathrm{Ker}\,(s_F + \mathrm{id}_E) = F^{\perp}$

(v) $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$.

(vi) $s_F = p_F - p_{F^{\perp}}$

Exemple

E 8 – Symétrie orthogonale par rapport au plan P de l'exemple précédent.

Comme $s_P = 2p_P - id_{\mathbb{R}^3}$, on obtient l'expression générale

$$s_P\big((x, y, z)\big) = \big(z, y, x\big)$$

Et alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = 2\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) - I_3$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

R 33 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \mathrm{Ker}\,(s_F - id)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(s_F + id)$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes avec des -1 sur la diagonale.

À savoir retrouver :

- Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de $H^{\perp}$.

$$\forall\, x \in E,\quad s_H(x) = x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

Démonstration

$s_H(x) = 2p_H(x) - x = 2(x - p_{H^{\perp}}(x)) - x = x - 2p_{H^{\perp}}(x)$ ■

7 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf_{y\in F} \|x-y\|.$$

Propriété 19 : Expression de la distance à un sevdf

Soit F est un sous-espace vectoriel ***de dimension finie*** *d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.*

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F, et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x,p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F) = \|x-y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^{\perp}$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base orthonormale de $F^{\perp}$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|p_{F^{\perp}}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

CC BY NC SA

Démonstration

Par théorème de Pythagore, si $y \in F$,

$$\|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2.$$

Donc $\|p_F(x) - y\| \leqslant \|x - y\|$ avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\| = 0$ c'est-à-dire $y = p_F(x)$.

De plus,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x - p_F(x))^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2$$

car $(e_k|p_F(x)) = 0$ pour $k \geqslant p+1$. Et

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2$$

par théorème de Pythagore. ∎

Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

Remarque

R 34 – Si F n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $\mathrm{d}(\exp, F)$ n'est pas atteinte car on peut montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi, dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles ?).
On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $\mathrm{d}(x,F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x - y \in F^\perp$ et on peut montrer que si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 8 : CCINP 81, 82

Corollaire 6 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal a : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$.
Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x,H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

Si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une équation de H dans une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E et si $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$\mathrm{d}(x,H) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$