18

Probabilités

I Espace probabilisé

1 Tribu

Définition 1 : Tribu

Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$

(ii) **Stabilité par passage au complémentaire** : $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

(iii) **Stabilité par réunion dénombrable** : Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de A, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathscr{A}$ ses **événements**.

Le vocabulaire vu en première année reste valable :

- Si $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** (qui est bien un événement).
- L'événement $\varnothing$ est appelé **événement impossible**.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Ne pas confondre issue = résultat = réalisation avec événement !

Propriété 1 : des tribus

Une tribu est stable par réunion finie, par intersection dénombrable, par intersection finie.

Ainsi dit, si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω,

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

(iii) Si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une famille finie d'éléments de $\mathscr{A}$, $\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$ et $\bigcap_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

2 Probabilité

Définition 2 : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **probabilité** (ou **mesure de probabilité**) sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{A}$ telle que

(i) $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \mathbb{P}(A) \in [0,1]$ ($\geqslant 0$ suffirait)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) **σ-additivité** : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (incompatibles), $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Propriété 2 : d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B des événements : $A, B \in \mathscr{A}$.

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Plus généralement, $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$.

(iii) Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.Si A et B sont quelconques, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

*(v) **Croissance** : si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*

Propriété 3 : Probabilité d'une réunion au plus dénombrable

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, alors $\left(\mathbb{P}(A_i)\right)_{i\in I}$ est sommable et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Définition 3 : Distribution de probabilités

Soit Ω un ensemble. On appelle **distribution de probabilités** sur Ω toute famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et somme (finie) égale à 1.

On appelle **support** d'une telle distribution $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$.

Propriété 4 : Support au plus dénombrable

Le support d'une distribution de probabilités est toujours au plus dénombrable.

3 Cas très simple : univers fini

Si Ω est fini, on prend généralement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, et la propriété de σ-additivité est équivalente à la propriété

Si A et B sont deux événements disjoints, alors $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Propriété 5 : Probabilité finie associée à une distribution

Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, $\mathbb{P}$ est entièrement définie par la donnée d'une distribution de probabilités $(p_{\omega_i})_{1\leqslant i\leqslant m}$ telle que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_{\omega_i}$. Et, pour toute partie A de Ω,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Les probabilités des événements élémentaires déterminent donc $\mathbb{P}$.

CC BY NC SA

4 Cas simple : univers dénombrable

Ici, on garde la propriété de σ-additivité, que l'on ne peut plus remplacer par la simple additivité.

Ici encore, il n'y a pas d'obstacle à prendre la tribu « discrète », c'est-à-dire $\mathscr{P}(\Omega)$. On obtient :

Propriété 6 : Probabilité discrète associée à une distribution

Soit Ω un ensemble dénombrable. Pour toute distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$, il existe une unique probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Cette probabilité vérifie

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Donc, encore une fois, $\mathbb{P}$ est définie de manière unique par les probabilités des singletons. Pour un univers fini ou dénombrable, les tribus d'évènements n'ont donc pas grand intérêt.

5 Cas moins simple : univers non dénombrable

Dans le cas où l'univers est infini indénombrable c'est plus compliqué : on peut montrer que pour un tirage à pile ou face infini non dénombrable, modélisé par $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (non dénombrable par argument diagonal de Cantor), la seule valeur possible pour la probabilité d'un événement élémentaire est... 0.

Pourquoi ? Intuitivement, si la probabilité d'obtenir un pile est $p\in]0,1[$, alors la probabilité d'obtenir n piles de suite de va être $p^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$... Donc, il est légitime de penser que l'événement « n'obtenir que des piles » a une probabilité nulle, par exemple.

C'est donc moins simple, on en peut pas se contenter des événements élémentaires, mais complètement hors-programme.

6 Continuités croissante et décroissante

Propriété 7 : Continuité croissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1}$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Corollaire 1 : Limite d'une probabilité d'une réunion

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Propriété 8 : Continuité décroissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subset A_n$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Corollaire 2 : Limite d'une probabilité d'une intersection

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

7 Inégalité de Boole

Propriété 9 : Inégalité de Boole

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors, dans $[0,+\infty]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

8 Négligeabilité

Définition 4 : Événement négligeable

On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

Propriété 10 : Partie d'un événement négligeable

Si A et B sont deux événements tel que $A \subset B$, si B est négligeable, A l'est.

Propriété 11 : Réunion, intersection finie ou dénombrable

Une réunion (respectivement intersection non vide) finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Définition 5 : Événement presque sûr

Un événement A est **presque sûr**, ou **presque certain**, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, ce qui équivaut à dire que $\overline{A}$ est négligeable.

Une propriété est dite **presque sûre** lorsque l'ensemble des éléments de Ω qui ont cette propriété est un événement presque sûr.

Propriété 12 : Réunion, intersection au plus dénombrable

Toute réunion non vide (respectivement intersection) finie ou dénombrable d'événements presque sûrs l'est encore.

II Conditionnement

Les notions vues en première année se généralisent sans problème particulier.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 6

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, B un événement tel que $\mathbb{P}(B)>0$. Pour tout événement $A\in\mathscr{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par

$$\mathbb{P}_B(A)=\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(Se lit en général « probabilité de A sachant B »)

Propriété 13 : Probabilité... conditionnée

$\mathbb{P}_B : A\in\mathscr{A}\mapsto\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$.

... et donc toutes les propriétés des probabilités, toutes les formules qui vont suivre peuvent être appliquées à des probabilités conditionnelles.
Lorsque plusieurs conditions s'enchaînent, il suffit de les intersecter :

$$\text{« }\mathbb{P}(A|B|C)\text{ »}=\mathbb{P}_C(A|B)=\mathbb{P}(A|B\cap C).$$

2 Probabilités composées

Propriété 14 : Formule des probabilités composées

Soit $n\geqslant 2$, $A_1,\dots,A_n$ des événements de l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})>0$.

$$\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)=\mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}(A_2\mid A_1)\times\mathbb{P}(A_3\mid A_1\cap A_2)\times\dots\times\mathbb{P}(A_n\mid A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$$

3 Probabilités totales

Définition 7 : Système complet et quasi-complet d'événements

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, I un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système complet d'évènements** lorsque

$$(i\neq j)\implies(A_i\cap A_j=\varnothing)\qquad\text{et}\qquad\bigsqcup_{i\in I}A_i=\Omega$$

On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système quasi-complet d'évènements** lorsque

$$(i\neq j)\implies(A_i\cap A_j=\varnothing)\qquad\text{et}\qquad\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)=1$$

Propriété 15 : Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{i\in I}$ où I est fini ou dénombrable est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\cap A_i)$$

Si, de plus, pour tout i, $\mathbb{P}(A_i)>0$ (A_i n'est pas négligeable),

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\mid A_i)\mathbb{P}(A_i)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Si certains événements sont négligeables, alors les $B\cap A_i$ le seront aussi et il suffit de remplacer la somme pour $i\in I$ par la somme pour $i\in J=\{i\in I,\ \mathbb{P}(A_i)>0\}$.

4 Formule de Bayes

Propriété 16 : Formule de Bayes

Si A,B sont des événements non négligeables, alors

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(B\mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si, de plus, $\overline{A}$ n'est pas négligeable,

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(B\mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B\mid A)\ \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}\left(B\mid\overline{A}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}.$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) est un système complet ou quasi-complet d'événements non négligeables, on a

$$\forall i\in I\qquad\mathbb{P}(A_i\mid B)=\frac{\mathbb{P}(B\mid A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k\in I}\mathbb{P}(B\mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

III Événements indépendants

1 Couple d'événements indépendants

Définition 8 : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B).$$

On note $A\perp\!\!\!\perp B$ lorsque A et B sont indépendants.

Propriété 17 : Caractérisation par probabilités conditionnelles

*Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(B)>0$ sont **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}(A)$.*

Propriété 18 : Indépendance et complémentaire

Si deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont indépendants, alors

- *A et $\overline{B}$ sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

2 Famille d'événements indépendants

Définition 9 : Événements indépendants vs 2 à 2 indépendants

Soit $(A_i)_{i\in I}$ avec I fini ou dénombrable une famille d'événements.

- Les A_i sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendant, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- Les A_i sont dit **indépendants**, lorsque pour toute partie **finie** non vide J de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriété 19 : Indépendants ⇒ 2 à 2 ⊥⊥

Si les A_i sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

La réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.

Propriété 20 : Passages au complémentaire dans l'indépendance

Si les événements A_i pour $i \in I$ sont indépendants et si pour tout $i \in I$ on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les B_i sont indépendants.

IV Variables aléatoires discrètes

On se donne une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1 Définition

Définition 10 : Variable aléatoire discrète

Soit E un ensemble quelconque. Une application $X : \Omega \to E$ est appelée **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ lorsqu'elle vérifie

(i) $X(\Omega) = \operatorname{Im} X = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} \in \mathscr{P}(E)$ est fini ou dénombrable.

(ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$ et est noté $(X = x)$.

Elle est dite **réelle** lorsque $E \subset \mathbb{R}$.

Propriété 21 : SCE associé à une variable aléatoire

$\big((X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé ***système complet d'événements associé à*** *X.*

Propriété 22 : Les parties de $X(\Omega)$ sont des événements

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors pour toute partie A de $X(\Omega)$, $(X \in A) \in \mathscr{A}$.

Propriété 23 : Une fonction d'une v.a.d. est une v.a.d

Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f : E \to F$ est une fonction (ou application) quelconque, alors $f \circ X$, notée $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

2 Loi

On fixe X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Définition 11 : Loi d'une v.a.d.

L'application

$$\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

est appelée **loi de** X.

Propriété 24 : La loi est une probabilité

$\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $\big(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega))\big)$.

Propriété 25 : Expression de la loi de X

Si $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}_X(\{a\}) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a).$$

Corollaire 3

La loi de X est uniquement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.

Notation 1 : ∼

Si X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.
Si X suit une loi $\mathscr{L}$, on note $X \sim \mathscr{L}$.

Propriété 26 : Loi de $f(X)$

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par $\forall\, y \in f(X(\Omega))$,

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}\left(X \in f^{-1}(\{y\})\right) = \sum_{x \mid f(x)=y} \mathbb{P}(X = x).$$

De la même manière, on obtient par exemple :

Propriété 27 : Loi d'une somme, d'un produit

Si X et Y sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{x,y \mid x+y=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{P}(XY=z) = \sum_{x,y \mid xy=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

V Familles de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.

1 Définition et lois

a Couple de variables aléatoires discrètes

Les notions vues en première année se généralise sans problème particulier.

Définition – Propriété 1

Soit X, Y variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E, E'. L'application

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète appelée **couple** $Z = (X, Y)$.

Propriété 28 : SCE associé à un couple

*Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors la famille d'événements $\left((X,Y) = (x,y)\right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple** (X, Y).*

b Loi conjointe

Définition 12 : Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires discrètes. On appelle **loi conjointe** de (X, Y) la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y).

c Lois marginales

Définition 13 : Lois marginales

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, les lois de X et de Y sont appelées **première et seconde lois marginales du couple.**

Propriété 29 : Loi conjointe détermine lois marginales

La loi conjointe de (X, Y) détermine les lois marginales de (X, Y) mais la réciproque est fausse.

d Lois conditionnelles

Définition 14 : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$ est la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}$.

Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

2 Extension aux n-uplets

Définition 15 : n-uplets de variables aléatoires

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes. C'est encore une variable aléatoire discrète appelé **vecteur aléatoire discret** de dimension n.

La **loi conjointe** de $(X_1, \dots, X_n)$ est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ où pour tout i, $x_i \in X_i(\Omega)$.

Les lois de $X_1, \dots, X_n$ sont les **lois marginales** de $(X_1, \dots, X_n)$.

Définition 16 : Loi conditionnelle pour n variables

Si $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de X_n sachant $(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout x_n.

3 Indépendance

a Cas d'un couple de variable

Définition 17 : Indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\ \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note parfois $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété 30 : Caractérisation par des événements élémentaires

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\ \mathbb{P}(Y = y).$$

Propriété 31 : Caractérisation par les lois conditionnelles

Soit (X, Y) couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

(i) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(ii) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi de X sachant $(Y = y)$ est la même que la loi de X.

(iii) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la loi de Y sachant $(X = x)$ est la même que la loi de Y.

Propriété 32 : Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes, f, g définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

b Variables aléatoires indépendantes

Définition 18 : Variables aléatoires indépendantes

Des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont dites **indépendantes** lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$, ..., A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1)$, ..., $(X_n \in A_n)$ le sont.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes est dite une **suite de variables aléatoire indépendantes** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_n$ le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaiid).

Propriété 33 : Caractérisation par des événements élémentaires

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1)$, ..., $(X_n = x_n)$ le sont.

Propriété 34 : Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n définie $X_n(\Omega)$, alors $\big(f_n(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Propriété 35 : Lemme des coalitions

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 < m < n$, $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, f définie sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et g définie sur $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.

Alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Le résultat s'étend à plus de deux coalitions.

Théorème 1

Soit $(\mathscr{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathscr{L}_n$.

VI Lois usuelles

1 Loi Uniforme

Définition 19 : Loi uniforme

On dit que qu'une variable aléatoire **finie** X suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

où $n = |X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A \subset X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(A) = \dfrac{|A|}{n}$.

On note alors $X \sim \mathscr{U}(n)$.

2 Loi de Bernoulli

Définition 20 : Loi de Bernoulli

On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ lorsque X est à valeurs dans $E = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Situation type : Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

Propriété 36 : Ce sont les fonctions indicatrices

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sont exactement les fonctions indicatrices des parties F de Ω telles que $\mathbb{P}(F) = p$.

3 Loi binomiale

Définition 21 : Loi binomiale

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** (n,p) **où** $p \in [0,1]$ lorsque X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $q = 1-p$. On note alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Situation type : Nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.

4 Loi géométrique

Définition 22 : Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p si X est à valeurs $\boxed{\text{dans } \mathbb{N}^*}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

On note $X \sim \mathscr{G}(p)$.

5 Loi de Poisson

Définition 23 : Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ si X est à valeurs $\boxed{\text{dans } \mathbb{N}}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

On note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

6 Propriétés des lois usuelles

a Somme de n vaiid de Bernoulli

Propriété 37 : Importante !

Si $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$, alors

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p).$$

b Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

Propriété 38 : Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

Soit $\lambda > 0$, $(p_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ tel que $np_n \to \lambda$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

VII Espérance

On fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1 Définition

Définition 24 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle positive

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

L'**espérance de** X est, par définition, dans $[0,+\infty]$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)x.$$

On a donc $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ suivant la sommabilité ou non de la famille réelle positive $(\mathbb{P}(X=x)x)_{x\in X(\Omega)}$.

Lorsque cette famille est sommable, X est dite d'**espérance finie** $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ et on note $X \in L^1$.

Propriété 39 : Cas d'une variable aléatoire entière

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Définition 25 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe discrète.

Lorsque la famille $(\mathbb{P}(X=x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X **est d'espérance finie**, on note $X \in L^1$ et on définit son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)x.$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance (pas plus infinie que finie)

Lorsque X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = 0$, X est dite **centrée**.

2 Théorème de transfert

Théorème 2 : de transfert

Soit X un variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs complexes.

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\left(\mathbb{P}(X=x)\ f(x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas

$$\mathbb{E}\left(f(X)\right)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)f(x).$$

Corollaire 4 : Espérance du module

X a une espérance finie si et seulement si $|X|$ a une espérance finie.

Le cas échéant, $\mathbb{E}(|X|)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\,|x|$.

Corollaire 5 : Sur un univers fini ou dénombrable

Uniquement dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, X est d'espérance finie si et seulement si $\left(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$ est sommable et dans ce cas

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

3 Propriétés de l'espérance

Une espérance peut être vue comme une intégrale, ce qui rend toutes ces propriétés naturelles.

Propriété 40 : de l'espérance

X et Y désignent deux variables aléatoires réelles ou complexes discrètes.

(i) *Si X est constante presque sûrement, c'est-à-dire qu'on a $a\in\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{P}(X=a)=1$, alors elle est d'espérance finie $\mathbb{E}(X)=a$.*

(ii) ***Linéarité** : si $X,Y\in L^1$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $X+\lambda Y\in L^1$ et*

$$\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y).$$

(iii) ***Positivité** : si $X\in L^1$ est à valeurs réelles, positive presque sûrement ie $\mathbb{P}(X\geqslant 0)=1$, alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.*

***Positivité améliorée** : si X est à valeurs réelles, positive presque sûrement et si X est nulle presque sûrement.*

(iv) ***Croissance** : si $X,Y\in L^1$ sont à valeurs réelles et si $X\leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*

(v) *Si $X\in L^1$, $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée et appelée **variable aléatoire centrée associée à** X.*

(vi) ***Inégalité triangulaire** : Si $X\in L^1$, $|X|\in L^1$ et*

$$|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|).$$

(vii) *Si $Y\in L^1$ et $|X|\leqslant Y$, alors $X\in L^1$ et $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*

En particulier, si X est bornée, elle est d'espérance finie.

Corollaire 6 : Espace vectoriel L^1

L'ensemble L^1 des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ admettant une espérance finie est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $X\mapsto\mathbb{E}(X)$ est une forme linéaire sur L^1.

4 Espérances des lois usuelles

Propriété 41 : Espérance des lois usuelles

(i) *Si $X\sim\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=p$.*

(ii) *Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X)=np$.*

(iii) *Si $X\sim\mathscr{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$.*

(iv) *Si $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X)=\lambda$.*

Corollaire 7 : Cas d'une fonction indicatrice

Soit A un événement de notre tribu $\mathscr{A}$. Alors $\mathbb{1}_A$ a une espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)=\mathbb{P}(A)$.

5 Espérance et indépendance

Propriété 42 : Espérance et indépendance

Soit X, $Y\in L^1$ indépendantes. Alors $XY\in L^1$, et

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Réciproque fausse en général.

*Plus généralement, si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de variables aléatoires **indépendantes** d'espérance finie, alors $\prod_{i=1}^n X_i$ l'est et*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)=\prod_{i=1}^n\mathbb{E}(X_i).$$

VIII Variance, écart-type et covariance

On fixe ici un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. Les variables aléatoires considérées sont à valeurs réelles.

1 Espace L^2

Notation 2 : L^2

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

On note $X\in L^2$ lorsque X^2 est d'espérance finie (ce qu'on peut noter $\mathbb{E}(X^2)<+\infty$ car X^2 est à valeurs réelles positives).

Propriété 43 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si deux variables aléatoires réelles discrètes $X, Y \in L^2$, leur produit $XY \in L^1$, et

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires presque sûrement, c'est-à-dire lorsqu'il existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tel tel que $\mathbb{P}(\lambda X + \mu Y = 0) = 1$.

Corollaire 8

L^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété 44 : $L^2 \subset L^1$

Si $X \in L^2$, $X \in L^1$.

2 Variance et écart-type

Définition 26 : Variance, écart-type, variable réduite

Soit $X \in L^2$.
On appelle **variance** de X le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}.$$

Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, X est dite **réduite**.

Propriété 45 : de la variance

Soit $X \in L^2$.

(*i*) ***Formule de Kœnig-Huygens*** *:*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

(*ii*) *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(x)$ donc $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.*

(*iii*) *Si $\sigma(X) \neq 0$, $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée* ***variable aléatoire centrée réduite associée à*** *X.*

3 Covariance

Définition 27 : Covariance

Soit $(X,Y) \in \left(L^2\right)^2$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.

On appelle **covariance** du couple (X,Y) le nombre

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, X et Y sont dites **non corrélées**.

Propriété 46 : de la covariance

Soient X, $Y \in L^2$ deux variables aléatoires réelles discrète admettant un moment d'ordre 2.

(*i*) *Cov est une forme bilinéaire symétrique positive.*

(*ii*) ***Formule de Kœnig-Huygens*** *:*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

(*iii*) *$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.*

(*iv*) *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et la réciproque est fausse.*

(*v*) ***Inégalité de Cauchy-Schwarz*** *:*

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \quad ie \quad |\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$

avec égalité si et seulement si les variables aléatoires sont colinéaires presque sûrement.

4 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété 47 : Variance d'une somme

Soient $X_1, \dots, X_n \in L^2$.

(*i*) *$X_1 + \dots + X_n \in L^2$ et*

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

(*ii*) *Si $X_1, \dots, X_n$ sont décorrélées deux à deux ($i \neq j \Rightarrow \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$),*

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n).$$

En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont des vaiid,

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = n\mathbb{V}(X_1).$$

5 Cas des lois usuelles

Propriété 48 : Espérance et variance des lois usuelles

(*i*) *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p) = pq$.*

(*i*) *Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$.*

(*iii*) *Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.*

(*iv*) *Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.*

IX Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres

Propriété 49 : Inégalité de Markov

Soit $X \in L^1$ une variable aléatoire discrète admettant une espérance finie. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

Propriété 50 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \in L^2$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $a > 0$.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire, en notant m l'espérance de X et σ son écart-type,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Théorème 3 : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1} \in \left(L^2\right)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes identiquement distribuées (de même loi) sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Soit m l'espérance de X_n et σ son écart-type.

On pose enfin $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

X Fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1 Définition

Définition 28 : Fonction génératrice

Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ **à valeurs dans** $\mathbb{N}$.

On appelle **fonction génératrice associée à** X la fonction $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$.

Propriété 51 : des fonctions génératrices

(i) *Le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n) t^n$ est au moins égal à 1, et elle converge normalement sur $[-1, 1]$.*

(ii) *Pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.*

(iii) *G_X est continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.*

Corollaire 9 : Caractérisation de la loi

Deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

Propriété 52 : Lien avec l'espérance et la variance

(i) *$X \in L^1$ (est d'espérance finie) si et seulement si G_X est dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.*

(ii) *$X \in L^2$ si et seulement si G_X est deux fois dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.*
On exprime alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.

Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$:

$$\boxed{G_X(t) = q + pt = 1 - p + pt}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k$ donc

$$\boxed{G_X(t) = (q + pt)^n = (1 - p + pt)^n}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$: $G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{n-1} t^n$ donc

$$\boxed{G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt} = \frac{pt}{1 - (1-p)t}}$$

définie sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{p}{q^2}$.

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} t^n$ donc

$$\boxed{G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

2 Somme des variables aléatoires

Propriété 53 : Fonction génératrice d'une somme

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$G_{X_1 + \cdots + X_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}.$$

Applications

- On retrouve la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la somme de n vaiid de loi de Bernoulli.
- Une somme de variables aléatoires de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_i)$ est encore de loi de Poisson de paramètre la somme des λ_i.
- Une somme de variables aléatoires de loi $\mathscr{B}(n_i, p)$ indépendantes est de loi $\mathscr{B}(\sum n_i, p)$

XI Formulaire

Sous réserve d'existence, sommabilité, d'admission de moments, etc. Voici les principales formules du chapitre.

- **Loi de X** $\boxed{\mathbb{P}_X : A \mapsto \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X=x)}$ déterminée par les $\mathbb{P}(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$, positifs de somme 1.

- **Espérance de X** $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)x}$ et si Ω fini ou dénombrable $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)}$ et si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).}$

- **Formule de transfert**

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)f(x).}$$

- **Variance de X** $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.}$

- **Covariance de X et Y**

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$$

nulle si indépendantes.

- **Variance d'une somme**

$$\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y).}$$

- **Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$**

$$\boxed{\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q \qquad \mathbb{E}(X) = p \qquad \mathbb{V}(X) = pq \qquad G_X(t) = q+pt}$$

- **Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$**

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0,n]\!],\ \ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \mathbb{E}(X) = np \qquad \mathbb{V}(X) = npq \qquad G_X(t) = (q+pt)^n}$$

- **Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$**

$$\boxed{p \in]0,1[\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1} \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2} \qquad G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}}$$

- **Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$**

$$\boxed{\lambda > 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad \mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda \qquad G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

- **Continuités croissante et décroissante**
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion)

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)}$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion)

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)}$$

- **Inégalité de Markov** Si $a > 0$, $\boxed{\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.}$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Si $a > 0$, $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. $\boxed{\mathbb{P}(|X-m| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}}$

- **Loi faible des grands nombres** Si $\varepsilon > 0$, (X_n) une suite de vaiid L^2 d'espérance m, alors

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** Si $X, Y \in L^2$, alors $XY \in L^1$, et

$$\boxed{(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)} \qquad \boxed{|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires presque sûrement.