17 Séries entières

I Convergence des séries entières

1 Définition

Définition 1 : Série entière

On appelle **série entière** toute série de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe.

2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence

a Lemme d'Abel

Propriété 1 : Lemme d'Abel

Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<|z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

b Rayon de convergence

Propriété 2 : Définition pratique du rayon de convergence

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}=[0,+\infty]$ unique tel que

- *Si $|z|<R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.* (ce cas ne se produit pas si $R=0$.)
- *Si $|z|>R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est (très) grossièrement divergente : la suite $\left(a_n z^n\right)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, et donc a fortiori ne converge pas vers 0.* (ce cas ne se produit pas si $R=+\infty$.)

Définition 2 : Rayon et disque ouvert de convergence

R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, parfois noté $R\left(\sum a_n z^n\right)$ dans le programme. Définition du programme :

$$R=\sup\left(\left\{r\in\mathbb{R}^+,\ \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée}\right\}\right)\in[0,+\infty].$$

$D(0,R)=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<R\}$ est le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Si $R=+\infty$, ce disque ouvert est $\mathbb{C}$.
Si $R=0$, c'est $\varnothing$.
Sinon, c'est un « vrai » disque.

c Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence

Méthode 1 : Utilisation du critère de d'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit : R est l'unique élément de $[0,+\infty]$ tel que si $|z|<R$, la série entière converge absolument et si $|z|>R$, elle diverge grossièrement.

Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes **réels strictement positifs**.

Propriété 3 : Critère de d'Alembert (Rappel)

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\ell\in[0,+\infty].$$

- *Si $\ell>1$, $\sum u_n$ diverge (très) grossièrement (et même $u_n\to+\infty$).*
- *Si $\ell<1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell=1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Propriété 4 : Critère de d'Alembert version série entière

Si au moins à partir d'un certain rang $a_n\neq 0$ et si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in[0,+\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R=\dfrac{1}{\ell}\in[0,+\infty]$ (où $\dfrac{1}{0}=+\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty}=0$).

Méthode 2 : Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver

- un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument,
- un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge,

on est sûr que $R=|z|$.

Méthode 3 : Suites bornées, convergence vers zéro

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes (penser au dessin avec le disque de convergence) :

- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z|\leqslant R$
- Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z|\geqslant R$.

Mais aussi

- Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z|\leqslant R$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z|\geqslant R$.

d Comparaison de rayons de convergence

Propriété 5 : Comparaison des suites de cœfficients et rayon de convergence

On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
Alors,

- *si $|a_n| \leqslant |b_n|$, ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ ou plus généralement $a_n = \mathcal{O}(b_n)$,*
$$R_a \geqslant R_b.$$
- *et si $a_n \sim b_n$,*
$$R_a = R_b.$$

Propriété 6 : Multiplication par n

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Corollaire 1 : multiplication ou division par n^k

Si $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Propriété 7 : Rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

3 Convergence normale

Propriété 8 : Convergence normale, version 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$. Alors $\sum f_n$ convergence normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ où $r < R$.

Corollaire 2 : Convergence normale, version 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$. Alors $\sum f_n$ convergence normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé inclus dans $D(0, R)$.

II Opérations algébriques sur les séries entières

1 Combinaisons linéaires

Propriété 9 : Somme de deux séries entières

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$. Alors
$$R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b).$$
De plus, $\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big)$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$
Enfin, si $R_a \neq R_b$, on a $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Propriété 10 : Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\lambda a_n) z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

2 Produits de Cauchy

Propriété 11 : Produits de Cauchy

On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Notons R_c son rayon de convergence. Alors
$$R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$$
et $\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big)$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

III Série entière d'une variable réelle

1 Continuité de la somme d'une série entière

Propriété 12 : Convergence normale, version réelle

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Si $R > 0$, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Corollaire 3 : Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

2 Théorème d'Abel radial

Théorème 1 : d'Abel radial

Si la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Corollaire 4 : Extension (HP)

si $\sum a_n (-R)^n$ converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to -R^+]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n.$$

Corollaire 5 : Extension (HP)

Si $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, et si $\sum a_n \left(R e^{i\theta}\right)$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{in\theta} \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n e^{in\theta}$$

3 Classe de la somme d'une série entière

Propriété 13 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence

On suppose que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in]-R, R[$, on peut écrire

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k} x^p$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).

On a alors $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

4 Primitivation de la somme d'une série entière

Propriété 14

On suppose que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors les primitives de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ sont données par

$$F : x \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(Cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R).

IV Fonctions développables en série entière

1 Définition

Définition 3 : Fonction DSE

Soit $r > 0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $]-r, r[$; on dit que f est **développable en série entière sur** $]-r, r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in]-r, r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

2 Stabilité

Propriété 15 : Opérations sur les fonctions DSE

Toute combinaison linéaire, tout produit, la dérivée, toute primitive d'une fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$ le sont.

3 Condition nécessaire, série de Taylor

Définition 4 : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 (i.e. de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins un certain intervalle $]-\delta, \delta[$ avec $\delta > 0$). On appelle **série de Taylor de** f la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Propriété 16 : condition nécessaire et unicité

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ $(r>0)$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière s'il existe.

Propriété 17 : Unicité du DSE

Si $\forall x\in]-r,r[\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Propriété 18 : Unicité bis du DSE

Si $\forall x\in]0,r[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n.$$

4 Critère de développabilité en série entière

Propriété 19 : Critère de développabilité en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ $(r>0)$, à valeurs réelles ou complexes.

On note, pour tout $x\in]-r,r[$,

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si , pour tout x dans $]-r,r[$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, si et seulement si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\tilde{0}$ sur $]-r,r[$.

V Développements en séries entières des fonctions usuelles

1 Fonctions d'une variable complexe

a Exponentielle complexe

Propriété 20 : Série exponentielle complexe

Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\ (R=+\infty)$$

Corollaire 6 : Morphisme

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z+z')=\exp(z)\ \exp(z').$$

b Série géométrique

Propriété 21 : Série géométrique

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\ (R=1)$.

2 Exponentielle réelle

Propriété 22 : DSE de e^x

La fonction $x\mapsto e^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y'=y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.\ (R=+\infty)$$

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété 23 : DSE de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$

Les fonctions $\sin$, $\cos$, ch, sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ $(R=+\infty)$, et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \operatorname{sh} x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Propriété 24 : DSE de $(1+x)^\alpha$

Pour tout α réel, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$).

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le développement est valable dans $\mathbb{R}$ ($R=+\infty$).

Corollaire 7 : DSE de $\dfrac{1}{1\pm x}$

En particulier, pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. ($R=1$)

5 $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$

Propriété 25 : DSE de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$

$x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$) et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

6 Arctan, Arcsin

Propriété 26 : DSE de Arctan

Arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$) et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

VI Quelques méthodes

1 Développements en séries entières

Méthode 4 : Montrer qu'une fonction est DSE au voisinage de 0 et/ou calculer le développement

1. Utiliser des DSE de fonctions usuelles : combinaisons linéaires, intégration, dérivation, produit de Cauchy.
   ⚠ : rien sur les composées dans le programme.
   Voir le cas de $\sin$, $\cos$, ch, sh, $\ln(1\pm x)$, Arctan *dans la partie précédente*
2. Décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.
3. Utiliser une équation différentielle.
   (a) Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R>0$.
   (b) Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle (en général par équivalences).
   (c) En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
   (d) Vérifier qu'effectivement, le rayon est >0 (synthèse).
   (e) Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

   Voir preuve pour $(1+x)^\alpha$.
4. Montrer que le reste de Taylor converge simplement vers la fonction nulle, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégrale.
   Voir le cas de $\exp$ *et* $\dfrac{1}{1-x}$ *dans la partie précédente.*

2 Calcul de somme d'une série entière

Méthode 5 : Utilisation les DSE des fonctions usuelles

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k, $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Intégration ou dérivation terme à terme.