17

Séries entières

I Convergence des séries entières

1 Définition

Définition 1 : Série entière

On appelle **série entière** toute série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe.

2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence

a Lemme d'Abel

Propriété 1 : Lemme d'Abel

b Rayon de convergence

Propriété 2 : Définition pratique du rayon de convergence

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} = [0,+\infty]$ unique tel que

- *Si $|z| < R$,*
- *Si $|z| > R$,*

Définition 2 : Rayon et disque ouvert de convergence

R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, parfois noté $R(\sum a_n z^n)$ dans le programme.

Définition du programme :

$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ est le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Si $R = +\infty$, ce disque ouvert est $\mathbb{C}$.
Si $R = 0$, c'est $\varnothing$.
Sinon, c'est un « vrai » disque.

Remarque

R 1 – Définition équivalente :

$$R = \sup\left(\left\{ r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n \text{ absolument convergente} \right\}\right) \in [0,+\infty]$$

R 2 – D'après la définition du rayon de convergence R,

- Si $|z| < R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente, mais aussi $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, et $(a_n z^n)$ est bornée, et $a_n z^n \to 0$.
- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, mais aussi $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement, $a_n z^n \not\to 0$.
- Si $|z| = R$: cas douteux, tout peut arriver.

Si $R = +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Si $R = 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge si et seulement si $z = 0$.

R 3 – Ne pas confondre $D_R = D(0,R)$ avec l'ensemble de définition de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On a en général $D_R \subset D_f \subset \overline{D_R}$.
Si $R=0$, $D_f=\{0\}$ et si $R=+\infty$, $D_f=\mathbb{C}$.

R4 – Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

R5 – Pour tout $p\in\mathbb{N}$, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+p}$ et $\sum_{n\geqslant p} a_n z^{n-p}$ ont même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exemple

E1 – La série géométrique $\sum z^n$

C Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence

Méthode 1 : Utilisation du critère de d'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit : R est l'unique élément de $[0,+\infty]$ tel que si $|z|<R$, la série entière converge absolument et si $|z|>R$, elle diverge grossièrement.

Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes **réels strictement positifs**.

Propriété 3 : Critère de d'Alembert (Rappel)

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0,+\infty].$$

- *Si $\ell>1$, $\sum u_n$ diverge (très) grossièrement (et même $u_n\to+\infty$).*
- *Si $\ell<1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell=1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Exercice 1 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$

Exercice 2 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$

Un version spéciale séries entières refait son apparition dans le programme : à utiliser ou non...

Mais parfois on est obligé de revenir à l'énoncé général (voir exercice sur série entière lacunaire).

Propriété 4 : Critère de d'Alembert version série entière

Si au moins à partir d'un certain rang $a_n\neq 0$ et si

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R=\frac{1}{\ell}\in[0,+\infty]$ (où $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0$).

Exercice 3 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exercice 4 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$

Exercice 5 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$.

Exercice 6 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n=\frac{n^4+n^3+1}{2\sqrt{n}+3}$

Exercice 7 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ (série entière lacuniare)

Remarque

R6 – La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ est vue comme la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=\frac{n^2}{2^n}$ et $a_{2n+1}=0$.

Exercice 8 : CCINP 20 - 2.a : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$

Méthode 2 : Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver

- un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument,
- un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge,

on est sûr que $R = |z|$.

Exercice 9 : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$

Exercice 10 : CCINP 20 - 2.c : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos(n) z^n$

Exercice 11 : CCINP 21

Méthode 3 : Suites bornées, convergence vers zéro

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes (penser au dessin avec le disque de convergence) :

- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$
- Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$.

Mais aussi

- Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geqslant R$.

Exercice 12 : Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$

Exercice 13 : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

Remarque

R 7 – Il est bon de retenir qu'il n'est jamais nécessaire d'utiliser la convergence des séries pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. En revanche, il peut s'avérer indispensable d'utiliser les suites bornées.

d Comparaison de rayons de convergence

Propriété 5 : Comparaison des suites de cœfficients et rayon de convergence

On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Alors,

- *si $|a_n| \leqslant |b_n|$, ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ ou plus généralement $a_n = \mathcal{O}(b_n)$,*
- *et si $a_n \sim b_n$,*

Propriété 6 : Multiplication par n

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Corollaire 1 : multiplication ou division par n^k

Si $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Propriété 7 : Rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Remarque

R 8 – $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont des rayons de convergence égaux à 1.
La première diverge sur tout le cercle, la seconde converge en certains points et diverge en d'autres, la troisième converge (absolument) en tout point du cercle.

Exercice 14 : CCINP 20 - 2.b : Déterminer le rayon de convergence la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$

3 Convergence normale

Propriété 8 : Convergence normale, version 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

Corollaire 2 : Convergence normale, version 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

Exercice 15 : CCINP 15

II Opérations algébriques sur les séries entières

1 Combinaisons linéaires

Propriété 9 : Somme de deux séries entières

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$. Alors

De plus, $\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b))$,

Enfin, si $R_a \neq R_b$, on a

Remarque

R 9 – Lorsque $R_a = R_b$, il est possible que R_{a+b} soit strictement supérieur à $R_a = R_b$.

Exemple

E 2 – Les séries entières (géométriques) $\sum z^n$ et $\sum -z^n$

Propriété 10 : Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(\lambda a_n)z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

2 Produits de Cauchy

Propriété 11 : Produits de Cauchy

On considère deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Notons R_c son rayon de convergence. Alors

et $\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b))$,

Remarque

R 10 – ⚠ Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que l'on ait $R_c > \min(R_a, R_b)$. Se méfier d'une confusion avec la somme, donc.

Exemple

E 3 – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par
- $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et pour tout entier $n > 2$, $a_n = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$.

Remarque

R 11 – Parfois les séries entières ne sont définies qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, si on considère des séries entières $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n z^n$, alors le produit de Cauchy se définit $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ en posant $a_0 = b_0 = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ et $c_0 = c_1 = 0$. Sur son intervalle ouvert de convergence, on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

3 Séparation des termes d'ordre pair et impair

Exercice 16

Soit R, R', R'' le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$. Montrer que $R = \min(R', R'')$.

Exercice 17 : CCINP 47 question 2.

III Série entière d'une variable réelle

Dorénavant, on considère des séries entière de la variable réelle : on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être une suite de nombres réels ou complexes, mais x reste réel.

Le disque ouvert de convergence devient intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on a $\boxed{]-R, R[\subset D_f \subset [-R, R],}$ où R est le rayon de convergence.

On ne peut rien dire en général en $\pm R$.

1 Continuité de la somme d'une série entière

Propriété 12 : Convergence normale, version réelle

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Si $R > 0$,

Corollaire 3 : Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence

Remarque

R 12 – Il peut y avoir des discontinuités « au bord. »
Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout « au bord. »

Exercice 18 : Jadis au programme...

Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R \in]0,+\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.

2 Théorème d'Abel radial

Théorème 1 : d'Abel radial

Si la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in]0,+\infty[$ et si

Remarque

R 13 – Si le rayon de convergence est $> R$, le résultat reste vrai mais est banal.

R 14 – Dans le cas où $\sum |a_n| R^n$ converge, la série de fonctions continues $\sum (x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement sur $[-R, R]$, sa somme est donc continue en R, ce qui montre très simplement le théorème.

R 15 – Il est intéressant d'écrire le cas où $R = 1$: si $\sum a_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

(dans ce cas, le rayon de convergence est $\geqslant 1$.)

Exercice 19 : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Ces exemples peuvent aussi se traiter sans le théorème d'Abel, en utilisant la majoration du reste dans le théorème des séries alternées pour montrer par exemple que $\sum \left(x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 20 : CCINP 18

Corollaire 4 : Extension (HP)

si $\sum a_n (-R)^n$ converge alors

Corollaire 5 : Extension (HP)

Si $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, et si $\sum a_n \left(R e^{i\theta} \right)$ converge, alors

3 Classe de la somme d'une série entière

Propriété 13 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence

On suppose que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in]-R, R[$, on peut écrire

$$f^{(k)}(x) =$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).
On a alors $a_k =$

Exercice 21 : CCINP 23

Exercice 22

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$ fixé. On rappelle que $\sum \frac{\cos n\theta}{n}$ converge (se fait par transformation d'Abel...) Calculer la somme de cette série à l'aide du théorème d'Abel radial.

4 Primitivation de la somme d'une série entière

Propriété 14

On suppose que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

Alors les primitives de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ sont données par

$$F : x \mapsto$$

(Cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R).

5 Quelques calculs

- **Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :**

$$\forall x \in]-1,1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n =$$

On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} =$$

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n =$$

Et ainsi de suite...

- **On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :**

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n =$$

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

(Cette dernière ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles : elle s'appelle **fonction dilogarithme** notée $\mathrm{Li}_2 : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \, \mathrm{d}t$.)

Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles.

Exercice 23

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} H_n x^n$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Exercice 24 : CCINP 19

IV Fonctions développables en série entière

1 Définition

Définition 3 : Fonction DSE

Soit $r > 0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $]-r, r[$; on dit que f est **développable en série entière sur** $]-r, r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in]-r, r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque

R 16 – On dit aussi que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

2 Stabilité

Propriété 15 : Opérations sur les fonctions DSE

Toute combinaison linéaire, tout produit, la dérivée, toute primitive d'une fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ le sont.

Remarque

R 17 – Par contre, attention, aucun résultat pour la développabilité en série entière d'une composée. Voir la partie 4 pour une méthode générique.

3 Condition nécessaire, série de Taylor

Remarque

R 18 – Pour que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$, il est nécessaire qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Définition 4 : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 (i.e. de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins un certain intervalle $]-\delta,\delta[$ avec $\delta>0$). On appelle **série de Taylor de** f la série entière

Propriété 16 : condition nécessaire et unicité

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ $(r>0)$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière s'il existe.

Remarque

R 19 – Simple mais important ! « par unicité du développement en série entière » sera un argument fréquemment utilisé.

Propriété 17 : Unicité du DSE

Si $\forall x\in]-r,r[\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n=$$

Remarque

R 20 – Comme pour les développements limités, l'unicité permet de voir que si une fonction est paire (respectivement impaire), alors tous les termes d'indices impairs (respectivement pairs) sont nuls.

Propriété 18 : Unicité bis du DSE

Si $\forall x\in]0,r[,\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n.$$

Remarque

R 21 – Cette version est nouvelle au programme et est très intéressante pour les séries génératrices en probabilités.

Exercice 25 : montrant que la condition n'est pas suffisante

Montrer que $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ prolongée par continuité en 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor a un rayon de convergence infini et que pourtant la fonction n'est pas développable en série entière.

4 Critère de développabilité en série entière

Propriété 19 : Critère de développabilité en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ $(r>0)$, à valeurs réelles ou complexes.

On note, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si

Remarque

R 22 – On rappelle que

$$R_n(x) = \int_0^x$$

et surtout que

$$|R_n(x)| \leqslant$$

V Développements en séries entières des fonctions usuelles

1 Fonctions d'une variable complexe

a Exponentielle complexe

Propriété 20 : Série exponentielle complexe

Remarque

R 23 – C'est aussi une définition alternative de $\exp(z)$.

Corollaire 6 : Morphisme

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z').$$

b Série géométrique

Propriété 21 : Série géométrique

2 Exponentielle réelle

Propriété 22 : DSE de e^x

La fonction $x \mapsto e^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et

Exercice 26

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété 23 : DSE de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$

Remarque

R 24 – Cela permet de démontrer que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. L'aviez-vous un jour démontré ?

4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Propriété 24 : DSE de $(1+x)^\alpha$

Remarque

R 25 – On note parfois $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, qui vaut 1 si $n = 0$. Cette notation ne vaut rien si on ne sait pas ce qu'elle signifie.

On a alors $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

R 26 – Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme de Newton.

Corollaire 7 : DSE de $\dfrac{1}{1 \pm x}$

5 $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$

Propriété 25 : DSE de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$

Exercice 27

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

6 Arctan, Arcsin

Propriété 26 : DSE de Arctan

Exercice 28

Développer en série entière les fonctions Arcsin **et** Arccos.

Exercice 29 : CCINP 51

VI Quelques méthodes

1 Développements en séries entières

Méthode 4 : Montrer qu'une fonction est DSE au voisinage de 0 et/ou calculer le développement

1. Utiliser des DSE de fonctions usuelles : combinaisons linéaires, intégration, dérivation, produit de Cauchy.
   ⚠ : rien sur les composées dans le programme.
   Voir le cas de $\sin$, $\cos$, ch, sh, $\ln(1 \pm x)$, Arctan *dans la partie précédente*
2. Décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.
3. Utiliser une équation différentielle.
   (a) Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R > 0$.
   (b) Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle (en général par équivalences).
   (c) En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
   (d) Vérifier qu'effectivement, le rayon est > 0 (synthèse).
   (e) Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

   Voir preuve pour $(1+x)^\alpha$.
4. Montrer que le reste de Taylor converge simplement vers la fonction nulle, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégrale.
   Voir le cas de $\exp$ *et* $\dfrac{1}{1-x}$ *dans la partie précédente.*

Exercice 30 : CCINP 2

Exercice 31 : CCINP 22

Exercice 32 : CCINP 32

2 Calcul de somme d'une série entière

Méthode 5 : Utilisation les DSE des fonctions usuelles

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k, $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Intégration ou dérivation terme à terme.

Exercice 33 : CCINP 47 question 1.

Exercice 34 : CCINP 24

Exercice 35

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-1)(n+2)}x^n$.

Exercice 36

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}x^n$.

Exercice 37 : Une application des séries génératrices

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k points fixes. On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$ désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ puis que $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$. Montrer que $\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
5. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
6. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?