17

Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de fonction développable en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, et elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être utilisée directement.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R, R[$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, \|z\| < 1\}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Table des matières

I Convergence des séries entières

1 Définition

Définition 1 : Série entière

On appelle **série entière** toute série de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe.

2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence

a Lemme d'Abel

Propriété 1 : Lemme d'Abel

Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<|z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Avec $|z_0|\neq 0$, $\left|a_n z^n\right| = |a_n z_0|^n \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n = \mathcal{O}\left(\left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n\right)$ terme général de série convergente. ∎

b Rayon de convergence

Propriété 2 : Définition pratique du rayon de convergence

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}=[0,+\infty]$ unique tel que

- *Si $|z|<R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.* (ce cas ne se produit pas si $R=0$.)
- *Si $|z|>R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est (très) grossièrement divergente : la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, et donc a fortiori ne converge pas vers 0.* (ce cas ne se produit pas si $R=+\infty$.)

Démonstration

Analyse Soit R convenant.

Si $R<+\infty$, $X=\left\{r\in\mathbb{R}^+ \,;\, (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ bornée}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que $[0,R[\subset X\subset[0,R]$, donc $R=\sup X$.

D'où l'unicité sous réserve d'existence.

Synthèse Posons $R=\sup X\in[0,+\infty]$.

Dans le cas où ce $\sup$ vaut $+\infty$, X n'est pas majorée donc pour tout $z\in\mathbb{C}$, il existe $r\in X$ tel que $|z|<r$ et, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente. Donc $R=+\infty$ convient.

Si le $\sup$ est fini, si $|z|<R=\sup X$, il existe $r\in X$ tel que $|z|<r$ donc d'après le lemme d'Abel, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Et si $|z|>R$, $|z|\notin X$ donc la suite $\left(a_n z^n\right)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée.

De nouveau, R convient.

D'où l'existence. ■

Définition 2 : Rayon et disque ouvert de convergence

R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, parfois noté $R\left(\sum a_n z^n\right)$ dans le programme.

Définition du programme :

$$R = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\}\right) \in [0, +\infty].$$

$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ est le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Si $R = +\infty$, ce disque ouvert est $\mathbb{C}$.
Si $R = 0$, c'est $\varnothing$.
Sinon, c'est un « vrai » disque.

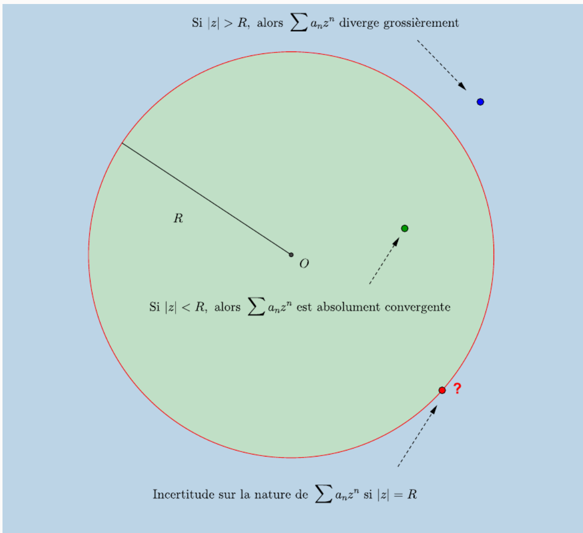
Remarque

R 1 – Définition équivalente :

$$R = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n \text{ absolument convergente}\right\}\right) \in [0, +\infty]$$

R 2 – D'après la définition du rayon de convergence R,

- Si $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente, mais aussi $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, et $(a_n z^n)$ est bornée, et $a_n z^n \to 0$.
- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, mais aussi $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement, $a_n z^n \not\to 0$.
- Si $|z| = R$: cas douteux, tout peut arriver.



Si $R = +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Si $R = 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge si et seulement si $z = 0$.

R 3 – Ne pas confondre $D_R = D(0,R)$ avec l'ensemble de définition de $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On a en général $D_R \subset D_f \subset \overline{D_R}$.
Si $R = 0$, $D_f = \{0\}$ et si $R = +\infty$, $D_f = \mathbb{C}$.

R 4 – Les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|\, z^n$ ont même rayon de convergence.

R 5 – Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{n+p}$ et $\sum\limits_{n\geqslant p} a_n z^{n-p}$ ont même rayon de convergence que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exemple

E 1 – La série géométrique $\sum z^n$ a un rayon de convergence de 1.

C Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence

Méthode 1 : Utilisation du critère de d'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit : R est l'unique élément de $[0,+\infty]$ tel que si $|z|<R$, la série entière converge absolument et si $|z|>R$, elle diverge grossièrement.

Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes **réels strictement positifs**.

Propriété 3 : Critère de d'Alembert (Rappel)

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0,+\infty].$$

- *Si $\ell>1$, $\sum u_n$ diverge (très) grossièrement (et même $u_n \to +\infty$).*
- *Si $\ell<1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell=1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Exercice 1 : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$

Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ convergence absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$, donc $R=+\infty$.

Exercice 2 : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$

Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2|z|^{n+1}}{n^2|z|^n} \to |z|$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ convergence absolument si $|z|<1$ et diverge grossièrement si $|z|>1$, donc $R=1$.

Un version spéciale séries entières refait son apparition dans le programme : à utiliser ou non...
Mais parfois on est obligé de revenir à l'énoncé général (voir exercice sur série entière lacunaire).

Propriété 4 : Critère de d'Alembert version série entière

Si au moins à partir d'un certain rang $a_n\neq 0$ et si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R=\frac{1}{\ell}\in[0,+\infty]$ (où $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0$).

Exercice 3 : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.

$\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{|z|}{\mathrm{e}}$, donc $R=\mathrm{e}$.

Exercice 4 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$

$\frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} \to \frac{1}{2}$, donc $R = 2$.

Exercice 5 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$.

$\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$, donc $R = 0$.
Bon, pour cet exemple, pas besoin de d'Alembert, on a directement que si $z \neq 0$, $n! z^n \not\to 0$...

Exercice 6 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n^4+n^3+1}{2\sqrt{n}+3}$

Dans cet exemple, mieux vaut passer par un équivalent : $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim 1$, donc $R = 1$.

Exercice 7 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ (série entière lacuniare)

Là, pas le choix, on revient au critère de d'Alembert général.
Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2 |z|^{2n+2} 2^n}{n^2 |z|^{2n} 2^{n+1}} \to \frac{|z|^2}{2}$, donc $R = \sqrt{2}$.
Autre possibilité, vu l'exercice 4, on a absolue convergence si et seulement si $|z^2| < 2$ si et seulement si $|z| < \sqrt{2}$ ce qui redonne $R = \sqrt{2}$.

Remarque

R6 – La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ est vue comme la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{n^2}{2^n}$ et $a_{2n+1} = 0$.

Exercice 8 : CCINP 20 - 2.a : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$

Méthode 2 : Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver

- un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument,
- un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge,

on est sûr que $R = |z|$.

Exercice 9 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$

Pour $z = -1$, la série est semi-convergente. Donc $R = 1$.
On aurait aussi pu appliquer le critère de d'Alembert.

Exercice 10 : CCINP 20 - 2.c : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \cos(n)z^n$

Exercice 11 : CCINP 21

Méthode 3 : Suites bornées, convergence vers zéro

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes (penser au dessin avec le disque de convergence) :

- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$
- Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$.

Mais aussi

- Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geqslant R$.

Exercice 12 : Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$

Comme (a_n) est bornée $R \geqslant 1$.
Mais $a_n \not\to 0$ (car $\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$), donc $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.
Remarque : rentre aussi dans la remarque qui résout tout car (a_n) est bornée sans tendre vers 0.

Exercice 13 : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

Si $|z| < R'$, $|a_n|^2 |z|^n \to 0$ donc $|a_n| \sqrt{|z|}^n \to 0$ donc $\sqrt{|z|} \leqslant R$ et $|z| \leqslant R^2$ donc $R' \leqslant R^2$.

Puis si $|z| < R$, $a_n z^n \to 0$ donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$ donc $|z|^2 < R'$ donc $R' \geqslant R^2$.

Finalement, $R' = R^2$.

Remarque

R 7 – Il est bon de retenir qu'il n'est jamais nécessaire d'utiliser la convergence des séries pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. En revanche, il peut s'avérer indispensable d'utiliser les suites bornées.

d Comparaison de rayons de convergence

Propriété 5 : Comparaison des suites de cœfficients et rayon de convergence

On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors,

- *si $|a_n| \leqslant |b_n|$, ou $a_n = o(b_n)$ ou plus généralement $a_n = \mathcal{O}(b_n)$,*

$$R_a \geqslant R_b.$$

- *et si $a_n \sim b_n$,*

$$R_a = R_b.$$

Démonstration

- si $|z| \leqslant R_b$, $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc $|z| \leqslant R_a$. Donc $R_a \geqslant R_b$.
- Deux applications symétriques du premier point.

Propriété 6 : Multiplication par n

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Soient R, R' les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |n a_n|$ donc $R \geqslant R'$.
Puis, si $|z| < R$, on va se débarrasser du n en comparant à une suite géométrique : si $|z| < r < R$, $|n a_n z^n| = n\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \cdot |a_n r^n| = \mathrm{o}(a_n r^n)$ par croissances comparées. Mais $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, donc $\sum n a_n z^n$ l'est aussi et $|z| \leqslant R'$. Ainsi, $R \leqslant R'$.

Corollaire 1 : multiplication ou division par n^k

Si $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Propriété 7 : Rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Démonstration

L'encadrement

$$n^{\lfloor\alpha\rfloor} |a_n| \leqslant n^\alpha |a_n| \leqslant n^{\lfloor\alpha\rfloor+1} |a_n|$$

permet de conclure avec la propriété précédente.

Remarque

R 8 – $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont des rayons de convergence égaux à 1.
La première diverge sur tout le cercle, la seconde converge en certains points et diverge en d'autres, la troisième converge (absolument) en tout point du cercle.

Exercice 14 : CCINP 20 - 2.b : Déterminer le rayon de convergence la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$

3 Convergence normale

Propriété 8 : Convergence normale, version 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$. Alors $\sum f_n$ convergence normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ où $r < R$.

Démonstration

Pour tout $z \in \overline{D}(0, r)$,

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leqslant |a_n| r^n$$

avec $\sum |a_n r^n|$ convergente, d'où la convergence normale sur $\overline{D}(0, r)$. ■

Corollaire 2 : Convergence normale, version 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$. Alors $\sum f_n$ convergence normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé inclus dans $D(0, R)$.

Démonstration

On suppose $z_0 \neq 0$.

On voit graphiquement qu'un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ inclus dans $D(0, R)$ est lui même inclus dans un disque fermé $\overline{D}(0, r_0)$ inclus dans $D(0, R)$ par inégalité triangulaire : si $|z - z_0| \leqslant r$, alors $|z| = |z - z_0 + z_0| \leqslant r_0 = r + |z_0|$.

Reste à vérifier que $r + |z_0| < R$.

Toujours à l'aide du dessin, on est tenté d'introduire l'affixe du point de $\overline{D}(z_0, r)$ le plus éloigné de 0 :

$$z = z_0 + r\frac{z_0}{|z_0|} = (|z_0| + r)\frac{z_0}{|z_0|}$$

Alors $|z - z_0| = r$ donc $z \in \overline{D}(z_0, r) \subset D(0, R)$ donc $|z| = |z_0| + r < R$. ■

Exercice 15 : CCINP 15

II Opérations algébriques sur les séries entières

1 Combinaisons linéaires

Propriété 9 : Somme de deux séries entières

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$. Alors

$$R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b).$$

De plus, $\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Enfin, si $R_a \neq R_b$, on a $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration

Si $|z| \leqslant \min(R_a, R_b)$, on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$, z tel que $R_a < |z| < R_b$, alors $a_n z^n \not\to 0$ et $b_n z^n \to 0$ donc $(a_n + b_n) z^n \not\to 0$ et $|z| \geqslant R_{a+b}$ puis $R_a \geqslant R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b) = R_a$. ■

Remarque

R 9 – Lorsque $R_a = R_b$, il est possible que R_{a+b} soit strictement supérieur à $R_a = R_b$.

Exemple

E 2 – Les séries entières (géométriques) $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ont pour rayon de convergence $R = 1$. Leur somme est la série nulle de rayon de convergence $R_{a+b} = +\infty$.

Propriété 10 : Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\lambda a_n) z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Démonstration

$(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $(\lambda a_n z^n)$ l'est. ■

2 Produits de Cauchy

Propriété 11 : Produits de Cauchy

On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Notons R_c son rayon de convergence. Alors

$$R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$$

et $\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration

Un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (familles sommables) converge vers le produit des sommes. ■

Remarque

R 10 – ⚠ Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que l'on ait $R_c > \min(R_a, R_b)$. Se méfier d'une confusion avec la somme, donc.

Exemple

E 3 – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

- $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et pour tout entier $n > 2$, $a_n = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$.

Les séries entières ont pour rayons de convergence respectifs $R_a = +\infty$ et $R_b = 1$.
Or $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_1 = 0$, donc $R_c = +\infty$.

Remarque

R 11 – Parfois les séries entières ne sont définies qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, si on considère des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n z^n$, alors le produit de Cauchy se définit $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ en posant $a_0 = b_0 = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ et $c_0 = c_1 = 0$. Sur son intervalle ouvert de convergence, on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

3 Séparation des termes d'ordre pair et impair

Exercice 16

Soit R, R', R'' le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$. Montrer que $R = \min(R', R'')$.

Si les séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux, alors c'est le cas de $\sum a_n z^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquets avec $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N}+1)$). On en déduit que $\min(R', R'') \leqslant R$. Autre argument possible sans la sommabilité ? si $a_{2n} z^{2n} \to 0$ et $a_{2n+1} z^{2n+1} \to 0$ alors $a_n z^n \to 0$.

Puis en remarquant qu'en posant b_n tel que $b_n = a_n$ si n pair et 0 sinon, on a $|b_n| \leqslant |a_n|$, on obtient $R' \geqslant R$ et de même on montre que $R'' \geqslant R$. Donc, $R \leqslant \min(R', R'')$.

Autre argument possible, si $|z| > R'$, il y a divergence grossière de $\sum a_{2n} z^{2n}$, donc $a_{2n} z^{2n} \not\to 0$ (ou non bornée) donc $a_n z^n \not\to 0$ (ou non bornée) donc $|z| \geqslant R$ et $R' \geqslant R$. De même, $R'' \geqslant R$.

Finalement, $R = \min(R', R'')$.

Exercice 17 : CCINP 47 question 2.

III Série entière d'une variable réelle

Dorénavant, on considère des séries entière de la variable réelle : on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être une suite de nombres réels ou complexes, mais x reste réel.

Le disque ouvert de convergence devient intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on a $\boxed{]-R, R[\subset D_f \subset [-R, R],}$ où R est le rayon de convergence.

On ne peut rien dire en général en $\pm R$.

1 Continuité de la somme d'une série entière

Propriété 12 : Convergence normale, version réelle

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Si $R > 0$, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Corollaire 3 : Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Démonstration

On obtient ici la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ car les f_n sont continues et la convergence est uniforme car normale au voisinage de chaque point de $]-R, R[$.
On étendera prochainement cette propriété aux séries entières d'une variables complexe. ■

Remarque

R 12 – Il peut y avoir des discontinuités « au bord. »
Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout « au bord. »

Exercice 18 : Jadis au programme...

Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.

Il y a convergence normale sur $[-R, R]$.

2 Théorème d'Abel radial

Théorème 1 : d'Abel radial

Si la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Démonstration

Hors-programme mais intéressante : utilisation d'une transformation d'Abel sur le reste après s'être ramené au cas $R = 1$. Voir exercice de TD. ■

Remarque

R 13 – Si le rayon de convergence est $> R$, le résultat reste vrai mais est banal.

R 14 – Dans le cas où $\sum |a_n| R^n$ converge, la série de fonctions continues $\sum (x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement sur $[-R, R]$, sa somme est donc continue en R, ce qui montre très simplement le théorème.

R 15 – Il est intéressant d'écrire le cas où $R=1$: si $\sum a_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

(dans ce cas, le rayon de convergence est $\geqslant 1$.)

Exercice 19 : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Ces exemples peuvent aussi se traiter sans le théorème d'Abel, en utilisant la majoration du reste dans le théorème des séries alternées pour montrer par exemple que $\sum \left(x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 20 : CCINP 18

Corollaire 4 : Extension (HP)

si $\sum a_n(-R)^n$ converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to -R^+]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème à $x \mapsto f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n$ où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui a même rayon de convergence.

Corollaire 5 : Extension (HP)

Si $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, et si $\sum a_n\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème à $x \mapsto f\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui a même rayon de convergence.

3 Classe de la somme d'une série entière

Propriété 13 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence

On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R>0$. Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in]-R,R[$, on peut *écrire*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k} x^p$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).

On a alors $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Démonstration

On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions : les f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, la série de fonction converge simplement et pour tout k, la série des $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]-R, R[$. ■

Exercice 21 : CCINP 23

Exercice 22

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$ fixé. On rappelle que $\sum \dfrac{\cos n\theta}{n}$ converge (se fait par transformation d'Abel...) Calculer la somme de cette série à l'aide du théorème d'Abel radial.

4 Primitivation de la somme d'une série entière

Propriété 14

On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *a un rayon de convergence* $R>0$. *Alors les primitives de* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sur* $]-R,R[$ *sont données par*

$$F : x \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(Cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R*).*

Démonstration

Conséquence immédiate de la propriété précédente. ∎

5 Quelques calculs

- **Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :**

$$\forall x \in]-1,1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Et ainsi de suite...

- **On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :**

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n =$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

(Cette dernière ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles : elle s'appelle **fonction dilogarithme** notée $\mathrm{Li}_2 : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.)

Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles.

Exercice 23

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$ **où** $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Remarquons que, pour tout n, $H_n \geqslant 1$. Donc $R \leqslant 1$ (la série $\sum H_n 1^n$ diverge grossièrement, donc 1 n'est pas dans le disque ouvert de convergence). Mais aussi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_n \leqslant n \times 1 = n$$

(majoration d'une somme par le nombre de termes multiplié par le plus grand d'entre eux). Donc $R \geqslant 1$ (en effet, si $|x|<1$, $H_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $|x| \leqslant R$).

Notons que l'équivalent célèbre $H_n \sim \ln n$ n'est pas nécessaire ici : très souvent, la détermination d'un rayon de convergence est assez grossière.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $b_n = \frac{1}{n}$. On définit aussi $b_0 = 0$. On a construit ces deux suites pour avoir, en posant $H_0 = 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

On peut alors appliquer le théorème sur le produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

d'où

$$\forall x \in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Une autre rédaction possible consiste à appliquer Fubini (la sommabilité étant assurée par l'absolue convergence de la série, et quitte à rajouter des termes nuls pour sommer sur $\mathbb{N}^2$) à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{x^n}{k} = \frac{1}{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 24 : CCINP 19

IV Fonctions développables en série entière

1 Définition

Définition 3 : Fonction DSE

Soit $r > 0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $]-r,r[$; on dit que f est **développable en série entière sur** $]-r,r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in]-r,r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque

R 16 – On dit aussi que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$.

2 Stabilité

Propriété 15 : Opérations sur les fonctions DSE

Toute combinaison linéaire, tout produit, la dérivée, toute primitive d'une fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ *le sont.*

Remarque

R 17 – Par contre, attention, aucun résultat pour la développabilité en série entière d'une composée. Voir la partie 4 pour une méthode générique.

3 Condition nécessaire, série de Taylor

Remarque

R 18 – Pour que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$, il est nécessaire qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Définition 4 : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 (i.e. de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins un certain intervalle $]-\delta,\delta[$ avec $\delta>0$). On appelle **série de Taylor de f** la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Propriété 16 : condition nécessaire et unicité

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ $(r>0)$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière s'il existe.

Remarque

R 19 – Simple mais important ! « par unicité du développement en série entière » sera un argument fréquemment utilisé.

Propriété 17 : Unicité du DSE

Si $\forall x\in]-r,r[\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque

R 20 – Comme pour les développements limités, l'unicité permet de voir que si une fonction est paire (respectivement impaire), alors tous les termes d'indices impairs (respectivement pairs) sont nuls.

Propriété 18 : Unicité bis du DSE

Si $\forall x\in]0,r[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n.$$

Remarque

R 21 – Cette version est nouvelle au programme et est très intéressante pour les séries génératrices en probabilités.

Démonstration

Il suffit de prendre les limites en 0 de toutes les dérivées successives terme à terme dans les deux séries entières. ■

Exercice 25 : montrant que la condition n'est pas suffisante

Montrer que $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ prolongée par continuité en 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor a un rayon de convergence infini et que pourtant la fonction n'est pas développable en série entière.

Notons en effet f cette fonction. On a vu que f était de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0) = 0$$

Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ $(r > 0)$, alors elle est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-r, r[\ f(x) = 0$$

ce qui est manifestement faux. Donc f n'est pas développable en série entière autour de 0.

4 Critère de développabilité en série entière

Propriété 19 : Critère de développabilité en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ $(r > 0)$, à valeurs réelles ou complexes.
On note, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Alors f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si , pour tout x dans $]-r, r[$, la suite $\left(R_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, si et seulement si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\tilde{0}$ sur $]-r, r[$.

Démonstration

En effet

$$\begin{aligned} f \text{ est développable en série entière sur }]-r, r[&\iff \forall x \in]-r, r[,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &\iff \forall x \in]-r, r[,\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \\ &\iff \forall x \in]-r, r[,\quad R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

■

Remarque

R 22 – On rappelle que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

et surtout que

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\underbrace{[0,x]}} \left|f^{(n+1)}\right|$$

V Développements en séries entières des fonctions usuelles

1 Fonctions d'une variable complexe

a Exponentielle complexe

Propriété 20 : Série exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

Remarque

R 23 – C'est aussi une définition alternative de $\exp(z)$.

Démonstration

Déjà vu : on applique Taylor-Lagrange à $f : t \in [0,1] \mapsto e^{tz}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = z^n$.
$\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|z^{n+1} e^{tz}\right| = |z|^{n+1} e^{t\mathfrak{Re}(z)} \leqslant |z|^{n+1} e^{t\mathfrak{Re}(z)} \leqslant |z|^{n+1} \max\left(1, e^{\mathfrak{Re}(z)}\right) = M(z)$ donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} M(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Corollaire 6 : Morphisme

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z').$$

Démonstration

Produit de Cauchy.

b Série géométrique

Propriété 21 : Série géométrique

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \ (R = 1)$.

2 Exponentielle réelle

Propriété 22 : DSE de e^x

La fonction $x \mapsto e^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.\ (R = +\infty)$$

Démonstration

C'est le cas réel du paragraphe précédent.

On peut aussi le remontrer directement : on a, pour tout k, $\exp^{(k)} = \exp$. Donc la majoration de Taylor-Lagrange donne, pour tout x réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

où $M = \sup_{[0,x]} (\exp)$ ($= 1$ si $x \leqslant 0$, $= e^x$ si $x \geqslant 0$). Or par croissances comparées,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$$

■

Exercice 26

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété 23 : DSE de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$

Les fonctions $\sin$, $\cos$, ch, sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ ($R = +\infty$), et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarque

R 24 – Cela permet de démontrer que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. L'aviez-vous un jour démontré ?

Démonstration

Soit Taylor-Lagrange, soit $\cos x = \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \mathfrak{Im}\left(e^{ix}\right)$.

Pour sh et ch : on peut aussi les voir comme parties paire et impaire de l'exponentielle. Ou alors on revient à la définition et on utilise le développement de l'exponentielle. ■

4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Propriété 24 : DSE de $(1+x)^\alpha$

Pour tout α réel, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ $(R=1)$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le développement est valable dans $\mathbb{R}$ $(R=+\infty)$.

Remarque

R 25 – On note parfois $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, qui vaut 1 si $n=0$. Cette notation ne vaut rien si on ne sait pas ce qu'elle signifie.

On a alors $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

R 26 – Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme de Newton.

Démonstration

On pourrait utiliser Taylor-Lagrange de nouveau, mais on va plutôt utiliser une méthode importante : la recherche de solutions développables en séries entières d'une équation différentielle.

Notons $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et remarquons que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et solution sur cet intervalle de l'équation

$$(1+x)y' - \alpha y = 0. \qquad (E)$$

On cherche d'éventuelles solutions développables en série entière de (E).

Analyse Soit ϕ tel que pour tout $x \in]-r,r[$ (avec $r>0$), $\phi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels.

(On suppose implicitement que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à r).

Par théorème, ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et se dérive terme à terme. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\phi \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[&\iff \forall x \in]-r,r[,\ (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n]\, x^n = 0\\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n \ (1)
\end{aligned}$$

(par unicité du développement en série entière.)

Synthèse Comme on a raisonné par équivalences, la seule chose à vérifier est que le rayon de convergence de la série entière est bien >0 pour valider le raisonnement.

Soit donc une suite vérifiant la relation de récurrence (1). S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$, alors (a_n) est stationnaire, nulle à partir d'un certain rang, est le rayon est $+\infty$ (C'est le cas par exemple si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Sinon, tous les a_n sont non nuls et on peut procéder par la règle de d'Alembert : si $x \neq 0$, $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 1$ donc le rayon est 1.

Comme $f_\alpha(0) = 1$, par unicité de solution au problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et de la condition initiale $f(0)=1$, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha-n}{n+1} a_n$.

On calcule alors $a_1 = \alpha$, $a_2 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$ (valable aussi pour $n=0$ car alors le produit vide vaut 1).

Corollaire 7 : DSE de $\frac{1}{1\pm x}$

En particulier, pour tout $x\in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ *et* $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$. $(R=1)$

5 $x\mapsto \ln(1+x)$, $x\mapsto \ln(1-x)$

Propriété 25 : DSE de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$

$x\mapsto \ln(1-x)$ *et* $x\mapsto \ln(1+x)$ *sont développables en série entière sur* $]-1,1[$ $(R=1)$ *et*

$$\forall x\in]-1,1[,\ \ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-x^n}{n}$$
$$\forall x\in]-1,1[,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Démonstration

Primitivation de séries entières géométriques. ■

Exercice 27

En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ En effet, le TSSA nous assure la convergence uniforme sur $[-1,0]$ et donc la continuité en -1 dans le DSE de $\ln(1-x)$.

6 Arctan, Arcsin

Propriété 26 : DSE de Arctan

Arctan *est développable en série entière sur* $]-1,1[$ $(R=1)$ *et*

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \mathrm{Arctan}\,x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Démonstration

Par primitivation. ■

Exercice 28

Développer en série entière les fonctions Arcsin **et** Arccos.

Pour Arcsin, c'est moins simple et cela n'apparaît pas dans le programme. Donc pas à connaître par cœur.

On peut utiliser le fait que sur $]-1,1[$,

$\mathrm{Arcsin}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On trouve

$$\mathrm{Arcsin}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et pour Arccos ? C'est $\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}$!

Exercice 29 : CCINP 51

VI Quelques méthodes

1 Développements en séries entières

Méthode 4 : Montrer qu'une fonction est DSE au voisinage de 0 et/ou calculer le développement

1. Utiliser des DSE de fonctions usuelles : combinaisons linéaires, intégration, dérivation, produit de Cauchy.
   ⚠ : rien sur les composées dans le programme.
   Voir le cas de $\sin$, $\cos$, ch, sh, $\ln(1\pm x)$, Arctan *dans la partie précédente*
2. Décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.
3. Utiliser une équation différentielle.
   (a) Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R>0$.
   (b) Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle (en général par équivalences).
   (c) En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
   (d) Vérifier qu'effectivement, le rayon est >0 (synthèse).
   (e) Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.
   Voir preuve pour $(1+x)^\alpha$.
4. Montrer que le reste de Taylor converge simplement vers la fonction nulle, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégrale.
   Voir le cas de $\exp$ *et* $\dfrac{1}{1-x}$ *dans la partie précédente.*

Exercice 30 : CCINP 2

Exercice 31 : CCINP 22

Exercice 32 : CCINP 32

2 Calcul de somme d'une série entière

Méthode 5 : Utilisation les DSE des fonctions usuelles

1. Si $P\in\mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \dfrac{P(n)}{n!}x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0=1$, $Q_1=X$, et pour tout k, $Q_k=X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Intégration ou dérivation terme à terme.

Exercice 33 : CCINP 47 question 1.

Exercice 34 : CCINP 24

Exercice 35

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-1)(n+2)}x^n$.

Par d'Alembert, $R=1$ (ou parce que le rayon de convergence de $\frac{n}{(n-1)(n+2)} \sim \frac{1}{n}$).

Puis décomposition en éléments simples.

Exercice 36

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}x^n$.

Par d'Alembert, $R=2$ (ou parce que le rayon de convergence de $\sum n^2x^n$ vaut 1).

Puis $n^2 = n(n-1)+n$ donc $f(2x) = x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

Donc pour tout $x \in]-2,2[$, $f(x) = \frac{2x^2+4x}{(2-x)^3}$.

Exercice 37 : Une application des séries génératrices

Pour tous les entiers k et n tels que $n\geqslant 1$ et $0\leqslant k\leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k points fixes. On pose $D_{0,0}=1$ et $d_n = D_{n,0}$ désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. **Dresser la liste de toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.**
2. **Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ puis que $D_{n,k} = \binom{n}{k}d_{n-k}$.**
3. **Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.**
4. **On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$. Montrer que $\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x|<1$.**
5. **En déduire que $d_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.**
6. **Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement.
Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?**

1. Il existe exactement $3! = 6$ bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :
   - l'identité ;
   - les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
   - les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas.
   On en déduit que
   $$\boxed{D_{3,0}=2,\ D_{3,1}=3,\ D_{3,2}=0 \text{ et } D_{3,3}=1.}$$
2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant k point fixes, alors les ensembles $A_0,\dots,A_n$ forment un recouvrement disjoint de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, on a bien $\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n}|A_k| = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}.}$

   Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   - $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
   - ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a d_{n-k} telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\boxed{D_{n,k} = \binom{n}{k}d_{n-k}.}$
3. On a $0\leqslant d_n \leqslant n!$, soit $\frac{|d_n|}{n!}\leqslant 1$. Donc $\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{d_n}{n!}z^n\right) \geqslant R\left(\sum_{n\geqslant 0} z^n\right) = 1.}$

4. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x|<1$. De plus, on a

$$e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!}.$$

   Mais

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = 1.$$

   On obtient

$$\boxed{e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

5. De l'égalité $e^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, on tire

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

   On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

   Par unicité des cœfficients d'une série entière, on obtient bien $\boxed{d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.}$

6. La probabilité recherchée est $p_n = \dfrac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de e^{-x}, on trouve que $\boxed{\text{cette probabilité converge vers } e^{-1} = \frac{1}{e}.}$