Intégrales à paramètres

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

Théorème 1 : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a \in \overline{J}$ éventuellement infini et $f : \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ On suppose

H1 Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} g(t)$

H2 Les $t \mapsto f_\lambda(x,t)$ pour $x \in J$ et g sont continues par morceaux sur I.

H3 ***Hypothèse de domination*** : Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 Les $t \mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.

C2 $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 2 : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ On suppose

H1 $\forall t \in I,\ \ x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.

H2 $\forall x \in X,\ \ t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_m(I)$.

H3 ***Hypothèse de domination*** : Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x \in X,\ \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

Théorème 3 : Extension par domination locale

On peut remplacer **H2** par

H2 Hypothèse de domination locale : Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction ϕ_V continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x' \in V,\quad \forall t \in I,\quad |f(x',t)| \leqslant \phi_V(t)$$

ou bien pour tout segment S de X, il existe une fonction ϕ_S continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x \in S,\quad \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi_S(t)$$

III Classe d'une intégrale à paramètre

Théorème 4 : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre – théorème de Leibniz

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ On suppose

H1 $\forall t \in I,\ \ x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, de dérivée $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

H2 $\forall x \in J,\ \ t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

H3 $\forall x \in J,\ \ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur I.

H4 ***Hypothèse de domination*** globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J

C2 $\forall x \in J,\ \ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I et $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 5 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée $x \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.*

H2 *Pour tout entier $j \in [\![0, k-1]\!]$, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est* ***intégrable*** *sur I.*

H3 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J*

C2 $\forall j \in [\![1, k]\!],\ \forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 1 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.*

H2 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ_k continue par morceaux, positive, intégrable sur I intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \phi_k(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J*

C2 $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.