16

Intégrales à paramètres

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue ; — pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux ; — il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; — pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ; — pour tout $x\in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x\in A,\qquad g'(x)=\displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Plan du cours

Les fonctions étudiées en mathématiques jusqu'à maintenant étaient construites à partir d'un petit nombre de fonctions dites *usuelles* (puissances, exponentielles, logarithmes, cosinus, sinus, etc.) et d'opérations algébriques (combinaisons linéaires, produit, quotient, composée, réciproque) ou analytiques (dérivation, intégration).

Les chapitres précédents ont permis d'étendre cette gamme de fonctions à l'étude de fonctions définies comme somme de série de fonctions, ce qui sera poursuivi dans le chapitre Séries Entières.

L'étude de phénomènes naturels en Physique et en Chimie conduit à l'utilisation de fonctions définies par des paramètres dépendant d'un (et même en général plusieurs) paramètre.

C'est le cas des fonctions de Bessel

$$J_n : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

de la fonction Beta

$$\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t,$$

de la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

par exemple.

Le but de ce chapitre est d'étudier analytiquement ces fonctions. Il a été vu un résultat permettant de calculer des limites dans le chapitre précédent : le **théorème de convergence dominée**. Les résultats de ce chapitre résultent également d'une **hypothèse de domination** qu'il faut absolument maîtriser.

De nombreux sujets de concours sollicitent ce chapitre.

Dans le cadre du programme, toutes les fonctions de ce chapitre sont à valeurs réelles ou complexes : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $f : \left|\begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$, dans le but d'étudier $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, on notera pour $t \in I$ fixé, $f_t : x \in I \to f(x,t)$ l'application partielle associée, c'est-à-dire $f_t = f(\cdot, t)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f_t'(x)$ sa dérivée en un point x lorsque cela a un sens, puis $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = f_t^{(k)}(x)$ sa dérivée d'ordre k en x.

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

On a déjà vu (et admis) dans le chapitre précédent, le théorème de convergence dominée pour les suites d'intégrale (sans les hypothèse de continuité par morceaux) :

Théorème 1 : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.*

H2 *Toutes les f_n pour $n\in\mathbb{N}$ et f sont continues par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ (c'est-à-dire continue par morceaux, positive et intégrable sur I) telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in I,\quad \left|f_n(t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_n et f sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$.

et son extension aux paramètres réels, déduit du théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle de la limite, que l'on peut réécrire en utilisant les notations de ce chapitre en l'appliquant à la famille $\left(f_x : t\mapsto f(x,t)\right)_{x\in J}$:

Théorème 2 : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a\in\overline{J}$ éventuellement infini et $f:\left|\begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t\in I$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{} g(t)$*

H2 *Les $t\mapsto f_\lambda(x,t)$ pour $x\in J$ et g sont continues par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x\in J,\ \forall t\in I,\quad \left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

C1 *Les $t\mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que la même extension aux paramètres dans un espace vectoriel de dimension finie ne coûte pas plus cher mais n'est pas mentionnée dans le programme. Dans ce cas, il faut repasser aux suites de fonctions via la caractérisation séquentielle. Ceci dit, la probabilité d'avoir besoin d'appliquer ce résultat dans autre chose que $\mathbb{R}$ est nulle.

Exercice 1 : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x>0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\ \mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Faire le changement de variable $u=xt$.

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 3 : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \left|\begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 $\forall t\in I,\quad x\mapsto f(x,t)$ *est continue sur* X.

H2 $\forall x\in X,\quad t\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}_m(I)$.

H3 ***Hypothèse de domination*** : *Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x\in X,\ \forall t\in I,\quad \left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

C1 $g : x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur* X.

Remarque

R1 – Le programme autorise à ne pas vérifier l'hypothèse « $\forall x\in X,\quad t\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}_m(I)$ » dans la pratique.

Démonstration

Montrer une continuité revient à calculer des limites. On va donc utiliser le théorème de convergence dominée.
Soit $a\in X$. On veut montrer que g est bien définie et $g(x)\xrightarrow[x\to a]{} g(a)$.
La bonne définition de g est garantie par l'hypothèse de domination.

- Pour tout $x\in X$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I vu **H2**.
- Pour tout $t\in I$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{} f(a,t)$ vu **H1** (avec $t\mapsto f(a,t)$ continue par morceaux sur I avec l'hypothèse omise).
- On a $\phi\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x\in X,\quad\forall t\in I,\quad\left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$ vu **H2**.

D'après le théorème de convergence dominée, $g(x)=\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to a]{}\int_I f(a,t)\,\mathrm{d}t=g(a)$.
Donc g est continue en a. ■

Théorème 4 : Extension par domination locale

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \left|\begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur X.*

H2 *Pour tout $x\in X$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination locale*** :

Pour tout $x\in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction ϕ_V continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x'\in V,\quad\forall t\in I,\quad\left|f(x',t)\right|\leqslant\phi_V(t)$$

ou bien pour tout segment S de X, il existe une fonction ϕ_S continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x\in S,\quad\forall t\in I,\quad\left|f(x,t)\right|\leqslant\phi_S(t)$$

Alors

C1 $g : x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur* X.

Démonstration

Alors g est continue au voisinage de tout point de X, donc sur X. ■

Exercice 2 : Transformée de Fourier

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\widehat{f}:x\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Transformée de Laplace

Soit $f:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f):x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 : CCINP 50

III Classe d'une intégrale à paramètre

Théorème 5 : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre – théorème de Leibniz

Soit I et J des intervalles réels et $f:\left|\begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 $\forall t\in I,\quad x\mapsto f(x,t)$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, de dérivée* $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

H2 $\forall x\in J,\quad t\mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur I.*

H3 $\forall x\in J,\quad t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction φ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x\in J\text{ ou }S,\ \forall t\in I,\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t).$$

Alors

C1 $g:x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J*

C2 $\forall x\in J,\quad t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g'(x)=\displaystyle\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

R 2 – Encore une fois, l'hypothèse « $\forall x\in J,\quad t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur I » est nécessaire mais sa vérification pratique n'est pas exigée par le programme officiel.

R 3 – ⚠ Attention à l'hypothèse **H2**, souvent oubliée, rendue nécessaire par l'absence d'hypothèse de domination appliquée à f...
Il s'agit simplement de la bonne définition de g. L'intégrabilité de la dérivée est, quant à elle, automatique.

R 4 – Voir un parallèle avec la dérivation des suites/séries de fonction : convergence simple et convergence uniforme des dérivées devient intégrabilité et domination des dérivées...

Démonstration

H3 et l'hypothèse omise de continuité par morceaux assurent l'existence de $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in J$ et **H2** assure celle de g.

Montrons que, si $a \in J$, $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

L'idée est de nouveau d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Si $x \in J\setminus\{a\}$, $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \int_I \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\,\mathrm{d}t$. On pose $h(x,t) = \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}$.

- Pour tout $x \in J\setminus\{a\}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ vu **H1** (avec $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ continue par morceaux.)
- On a $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \in J\setminus\{a\},\quad \forall t \in I,\quad |h(x,t)| \leqslant \phi(t)$ vu **H3** via l'inégalité des accroissements finis, $x \mapsto f(x,t)$ étant $\phi(t)$-lipschitzienne à t fixé au moins au voisinage de a.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc g est dérivable en a et $g'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

Comme c'est vrai pour tout $a \in J$, g est dérivable sur J, g' a l'expression voulue, et en appliquant le théorème de continuité à $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$, on obtient que g est de classe $\mathscr{C}^1$. ■

Théorème 6 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée $x \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.*

H2 *Pour tout entier $j \in [\![0,k-1]\!]$, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est* ***intégrable*** *sur I.*

H3 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J*

C2 $\forall j \in [\![1,k]\!],\quad \forall x \in J,\quad t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 : Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. On définit, si $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Calculer la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

   On pourra utiliser la fonction $g : x \to \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'.
5. En déduire I.

Exercice 6 : CCINP 30

En l'appliquant pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corollaire 1 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left|\begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.*

H2 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ_k continue par morceaux, positive, intégrable sur I intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi_k(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J*

C2 $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in J,\ \ t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

R5 – Il suffirait aussi d'avoir intégrabilité jusqu'à un certain rang de dérivation, puis dominations.
Ou alors domination à partir de $k = 0$: on enlève **H2** et on change $k \in \mathbb{N}^*$ en $k \in \mathbb{N}$.
Pas d'énoncé précis dans le programme officiel.

IV Étude de la fonction Γ (HP)

Un très grand classique, incontournable ! C'est quasiment du cours, à connaître parfaitement.

Exercice 7 : On définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. **Déterminer l'ensemble de définition de Γ.**
2. **Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?**
3. **Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.**
4. **Montrer que Γ est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.**
5. **Montrer que Γ est une fonction convexe.**
6. **Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,b]$, que $(\Gamma')^2 \leqslant \Gamma\Gamma''$ et en déduire que Γ est $\ln$-convexe.**
7. **Montrer que Γ' s'annule en un $x_0 \in]1,2[$ et nulle part ailleurs.**
   On trouve numériquement que $x_0 \approx 1{,}46$ et $\Gamma(x_0) \approx 0{,}89$.
8. **Montrer que $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et en déduire sa limite.**
9. **Déterminer la limite en $+\infty$ de Γ.**
10. **Tracer son graphe.**
11. **Montrer que $\forall\, x > 0$, $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.**

Solution :

1. En effet, la fonction $f_x \,:\, t \longrightarrow \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive.
   - Intégrabilité sur $[1,+\infty[$: par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur x.
   - Intégrabilité sur $]0,1]$: $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1 > -1$, i.e. $x > 0$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_*^+.}$
2. Par intégration par parties, si $0 < \varepsilon < A$,
$$\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x}\int_a^A \mathrm{e}^{-t}t^x\,\mathrm{d}t \tag{1}$$
   Mais, par croissances comparées,
$$\mathrm{e}^{-A}\frac{A^x}{x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$
   et de plus
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$
   On en déduit, en prenant les limites quand $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$ dans (1),
$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$
   C'est-à-dire $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$ Comme $\Gamma(1) = 1$, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ \Gamma(n) = (n-1)!.}$
3. On définit
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ \times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \end{array} \right.$$
   Et on constate facilement que

   H1 Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
   H2 Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.

H3 **Domination** *La domination, pour la continuité de Γ, est à la fois un peu technique et très importante.*
Soit $S=[a,b]$, $0<a<b$. On a

$$\forall (x,t)\in S\times]0,+\infty[\qquad 0\leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\leqslant \phi(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t\leqslant 1\\ \mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t>1\end{cases}$$

Rien n'empêche une fonction « dominatrice » d'être définie par morceaux.
Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :

$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\leqslant \phi_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)$$

ou encore

$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\leqslant \phi_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)$$

ϕ est continue, positive, intégrable sur $]0,1]$ car $\phi(t)\underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1}=\dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$ et sur $[1,+\infty[$ car $\phi(t)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, avec $2>1$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique bien : $\boxed{\Gamma\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_*^+)}$.

4. On reprend

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}=\mathrm{e}^{-t+(x-1)\ln t}\end{array}\right.$$

Et on constate facilement que

H1 Pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$ avec pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\ :\ (x,t)\longmapsto (\ln t)^k f(x,t).$$

H2 Pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

H3 **Dominations :** Soit $k\in\mathbb{N}$. Soit $K=[a,b]$ avec $0<a<b$. On a

$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant \phi_k(t)=\begin{cases}|\ln t|^k\,\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t\leqslant 1\\ |\ln t|^k\,\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t>1\end{cases}$$

avec ϕ_k positive, continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,1]$ car $\phi_k(t)=\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1-a<\alpha<1$ et sur $[1,+\infty[$, car $\phi=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres, $\boxed{\Gamma\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{\Gamma^{(k)}:(x,t)\mapsto\int_0^{+\infty}(\ln t)^k f(x,t)\,\mathrm{d}t.}$$

5. D'après ce qui précède, $\Gamma''\geqslant 0$.
6. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $f:t\mapsto\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ et $g:t\mapsto \ln t\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ sur $[a,b]$, puis en faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, on obtient $(\Gamma')^2\leqslant\Gamma\Gamma''$.
On en déduit que $(\ln\circ\Gamma)''\geqslant 0$.
7. Le théorème de Rolle s'applique :

   H1 Γ est continue sur $[1,2]$,
   H2 dérivable sur $]1,2[$,
   H3 $\Gamma(1)=\Gamma(2)(=1)$,

   ce qui donne l'existence de $x_0\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0)=0$. Comme par ailleurs Γ' est strictement croissante, il s'agit de son seul zéro.
8. $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)\to\Gamma(1)=1$ par continuité.
9. Le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite finie ou $+\infty$ pour Γ en $+\infty$. Comme, par ailleurs, $\Gamma(n)=(n-1)!\to+\infty.$, on en déduit que $\Gamma(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

10. Fixons $x > 0$. Appliquons le théorème de convergence dominée à $f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{]0,n]}(t)$.

H1 Pour tout $t]0,+\infty[$, à partir d'un certain rang $n \geqslant t$ et $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

H2 $f_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ et toutes les f_n est continues (donc continues par morceaux) sur $\mathbb{R}_*^+$.

H3 **Domination** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$,

$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} = f_x(t)$$

en utilisant l'inégalité de convexité $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

f_x est continue, positive, intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 1 et indépendante de n.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\forall x > 0,\quad \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

Exercice 8 : CCINP 29