

Limites d'intégrales

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence dominée	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{K} convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $ f_n \leq \varphi$ pour tout n . Alors :	La démonstration est hors programme.
$\int_I f_n \rightarrow \int_I f.$	
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de \mathbb{R} .	
Intégration terme à terme	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .	
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I , alors, dans $[0, +\infty]$,	La démonstration est hors programme.
$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$	En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à
	$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty.$
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , à valeurs dans \mathbb{K} , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables.
$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty,$	On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.
alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et	
$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$	



Table des matières

15 Limites d'intégrales	1
I Interversion limites et intégrales	2
1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment	2
2 Théorème de convergence dominée	3
3 Un découpage d'intégrale	6
4 Extension du théorème	6
II Intégration terme à terme : Interversion série-intégrale	7
1 Rappel : convergence uniforme sur un segment	7
2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives	8
3 Cas général	8
4 Mise en pratique	9

I INTERVERSION LIMITES ET INTÉGRALES

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a, b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors

C1 f est continue sur $[a, b]$

C2 $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Remarque

R1 – Un joli théorème mais qui demande

- d'être sur un segment,
- des fonctions continues dans le programme (mais continues par morceaux suffirait... sauf que la continuité par morceaux, contrairement à la continuité, ne se transmet pas par convergence uniforme),
- de la convergence uniforme !

Donc, dans la pratique, il ne s'applique pas si souvent...

2 Théorème de convergence dominée

Le but est d'intervertir limite et intégrale sur un intervalle quelconque. Le programme officiel stipule que « pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t . »

Théorème 2 : de convergence dominée (version discrète)

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes.
On suppose

H1 La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .

H2 Toutes les f_n pour $n \in \mathbb{N}$ et f sont continues par morceaux sur I .

H3 Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\phi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ (c'est-à-dire continue par morceaux, positive et intégrable sur I) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \phi(t)$$

Alors

C1 Les f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f$.

Démonstration

Hors-programme.

Remarque

R2 – Le théorème demande donc que les f_n et f soient continues par morceaux sur I , sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on peut se permettre de ne pas vérifier/justifier.

R3 – « à valeurs réelles ou complexes » est une hypothèse rendue nécessaire par le fait que lorsqu'on parle d'intégrales ailleurs que sur un segment, on se limite aux fonctions à valeurs complexes.

R4 – « continue par morceaux » : déjà, la convergence uniforme ne transmet pas la continuité par morceaux (elle transmet la continuité), et ici on n'impose que la convergence simple, ce qui ne transmet vraiment rien du tout (en fait si : la monotonie, la parité, etc.)

R5 – La fonction ϕ est nécessairement à valeurs réelles positives.

R6 – Sur un segment, lorsqu'il y a continuité et convergence uniforme, pas besoin de domination. Mais dans ce cas, il suffit de dominer par une fonction constante.

R7 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_n .

Exercice 1 : Wallis

Démontrer que la suite de terme général $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$ converge, donner sa limite.

Définissons

$$f_n : \begin{cases}]0, \pi/2[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \sin^n t \end{cases}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $\tilde{0}$. L'hypothèse de domination est facile à réaliser :

$$\forall n \geq 0 \quad \forall t \in]0, \pi/2[\quad |\sin^n t| \leq 1$$

Or la fonction $t \mapsto 1$ est indépendante de n , et intégrable sur $]0, \pi/2[$.

Les fonctions f_n et la fonction $\tilde{0}$ sont continues par morceaux, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{\pi/2} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \tilde{0} = 0$$

**Remarque**

- R8 – On rencontre beaucoup de suites monotones de fonctions (à ne pas confondre avec une suite de fonctions monotones : une suite croissante de fonctions, c'est une suite (f_n) telle que, pour tout n , $f_n \leq f_{n+1}$, autrement dit pour tout n et pour tout x , $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$).
- Si on ne sait pas par quoi dominer la famille f_n , on pourra donc essayer de dominer soit par la valeur absolue de la limite simple de la suite (f_n) , soit par $|f_0|$ (ou $|f_1|$...).

Exercice 2 : Utilité de l'hypothèse de domination

Définissons, sur $[0, 1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$, et prenant en $\frac{1}{n+2}$ la valeur $n+1$.

Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 : CCINP 25

Exercice 4 : CCINP 26

**Exercice 5 : CCINP 27**

3 Un découpage d'intégrale

Exercice 6

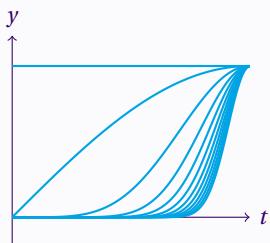
On peut démontrer la convergence vers 0 de la suite des intégrales de Wallis sans utiliser le théorème de convergence dominée. On considère $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

On remarque d'abord que l'on est sur un segment, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(\sin^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Traçons des graphes de ces fonctions.

On voit qu'elles concentrent leur intégrale au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, ce qui motive le découpage suivant : soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$



En déduire le résultatat.

On a, pour tout n ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Mais $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leq 1$, donc il existe un rang N à partir duquel $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $n \geq N \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

4 Extension du théorème

En utilisant le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite, on peut déterminer des limites d'intégrale avec un paramètre qui n'est pas nécessairement un entier.

On peut donner l'énoncé suivant qui n'est pas à connaître par cœur : dans la pratique, on peut repasser à la main par les suites. Mais l'énoncé est très proche du précédent !

Théorème 3 : de Convergence Dominée (version continue)

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \bar{J}$ éventuellement infini.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions et f une fonction, définies sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1 Pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \lambda_0]{} f(t)$.

H2 Les f_λ pour $\lambda \in J$ et f sont continues par morceaux sur I .

H3 Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\phi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall \lambda \in J, \forall t \in I, |f_\lambda(t)| \leq \phi(t)$$

Alors

C1 Les f_λ et f sont intégrables sur I et $\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \lambda_0]{} \int_I f$.

Remarque

R9 – De nouveau, le théorème demande aussi que les f_λ et f soient continues par morceaux sur I , sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R10 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_λ , et en faisant tendre λ vers λ_0 dans la domination, on obtient celle de f .

Exercice 7 : Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ a une limite quand $x \rightarrow +\infty$; la calculer.

Domination par $\frac{1}{1+t^2}$, limite nulle.

Exercice 8 : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty]$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Changement de variable $u = xt$. $xF(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} f(0)$ et $xF(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \ell$ avec $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Exercice 9 : Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente

Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. On définit, si $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$.

Calculer la limite de F en $+\infty$. Puis montrer que $F(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g: x \rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Remarque

R11 – Lorsque l'on saura dériver ce type de fonctions, cela nous permettra de retrouver la valeur de I : cela revient sous quelques hypothèses à dériver sous le signe intégral, ce qui permet de montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x$.

Pour la limite en $+\infty$: TCV avec domination sur $[1, +\infty]$ par exemple par $\phi(t) = e^{-t} \left| \frac{\sin t}{t} \right|$.

Sinon IPP : on se ramène à l'exercice précédent.

II INTÉGRATION TERME À TERME : INTERVERSION SÉRIE-INTÉGRALE

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème 4 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$
alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.



C2 $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge.

C3 $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$

2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

Théorème 5 : Interversion séries-intégrales de fonctions à valeurs réelles positives

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in ((\mathbb{R}^+)^I)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions à valeurs réelles positives. On suppose

H1 La série $\sum f_n$ converge simplement sur I

H2 Les f_n pour $n \in \mathbb{N}$ et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont continues par morceaux sur I .

Alors

C1 $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$

(Égalité dans $[0, +\infty]$.)

Remarque

R12 – De nouveau, le théorème demande aussi que les f_n et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soient continues par morceaux sur I , sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R13 – En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n < +\infty$.

Démonstration

Hors programme.

3 Cas général

Théorème 6 : Interversion séries-intégrales, convergence N_1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 La série $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I .

H2 Chaque f_n est intégrable sur I (et donc en particulier continue par morceaux sur I .)

H3 La série $\sum N_1(f_n) = \sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors

C1 $\sum \int_I f_n$ converge.

C2 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I .

C3 $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$

Démonstration

Hors programme.

Remarque

- R 14 – De nouveau, le théorème demande aussi que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit continue par morceaux sur I , mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.
- R 15 – On note en général $N_1(f_n) = \int_I |f_n|$. L'hypothèse cruciale **H3** s'écrit alors : $\sum N_1(f_n)$ converge.
- R 16 – Y voir un parallèle avec le théorème de Fubini : la sommabilité est une convergence absolue de la somme double, à la différence qu'ici une somme est discrète, l'autre est continue.

4 Mise en pratique

**Méthode 1 : Intégration terme à terme / Interversion séries-intégrales**

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Dans le cas réel positif, l'interversion peut être faite a priori, et on vérifie ensuite si les quantités manipulées sont finies ou $+\infty$.
2. Sinon, on peut appliquer le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
3. Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément. Le plus agréable serait qu'elle converge normalement^a, donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.
4. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique.

- On peut envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_a^b S_n(t) dt$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $|S_n(t)|$.
- On peut aussi poser $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et écrire, pour tout $n \geq 0$, $S = \sum_{k=0}^n f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur les séries alternées...)

a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leq (b-a)N_\infty$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.

Exercice 10

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 11

On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit, sur \mathbb{R} , $f : t \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t) dt = a_m$.

Exercice 12

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

**Exercice 13 : ex CCINP 19**

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que $f : t \mapsto e^t \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que $\int_0^1 e^t \ln t dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$.

1. On pose, pour tout entier naturel n , $f_n : t \in]0, 1] \mapsto t^n \ln t$, continue sur $]0, 1]$.

On a $t^{\frac{1}{2}} |f_n(t)| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ donc, au voisinage de 0, $|f_n(t)| = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (fonction de Riemann intégrable). Donc f_n est intégrable sur $]0, 1]$.

De plus, pour $x \in]0, 1]$, par intégration par parties

$$\int_x^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n!}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \in]0, 1] \mapsto \frac{t^n \ln t}{n!}$. Sous réserve de pouvoir intervertir, on obtiendra

$$\int_0^1 e^t \ln t dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)^2} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$

C'est-à-dire $\int_0^1 e^t \ln t dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$. Justifions l'intégration terme à terme :

H1 $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et a pour somme f qui est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

H2 $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $]0, 1]$ d'après la question 1.

H3 $N_1(g) = \int_0^1 |g_n(t)| dt = \int_0^1 \frac{-t^n \ln t}{n!} dt = \frac{-I_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq N_1(g_n) \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

De plus, $\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{(n+1)^2 n!}$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions s'applique et il donne en particulier l'intégrabilité de f .

Exercice 14 : CCINP 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

1. (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

(b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x .

(a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement; donc la suite (a_n) converge vers 0 et donc elle est bornée.

Autre méthode : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq M = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

(b) Soit $t \in [0, +\infty[$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq M \frac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge. On a donc vérifié la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^2 g_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $g_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En effectuant une intégration par parties, on prouve que $I_n = n I_{n-1}$. On en déduit par récurrence que

$I_n = n! I_0 = n!$. Alors $t \mapsto |f_n(t)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|f_n(t)| = \frac{|a_n|}{n!} g_n(t)$ et on a $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$.

(b) **H1** $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et a pour somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b) dont on a admis la continuité sur $[0, +\infty[$.

H2 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question 2.(a)

H3 $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$ terme général de série convergente par hypothèse.

Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$