14

Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette section est :

— *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$.	
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f\rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

Contenus	Capacités & Commentaires
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence.	
Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.
Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire.	
Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

I INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a,+\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente en $+\infty$

Définition 1 : Intégrale convergente en $+\infty$

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Remarque

R 1 – Lorsque $\int_a^{+\infty} f$ diverge, l'objet $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a aucun sens... sauf dans le cas où f est à valeurs réelles positives (cf partie suivante).

Exemple

E 1 – $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$: l'intégrale est convergente.

E 2 – $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ diverge.

Propriété 1 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

On calcule $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$ ce qui permet de conclure. ■

Propriété 2 : Intégrales exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration

On calcule $\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$ ce qui permet de conclure. ■

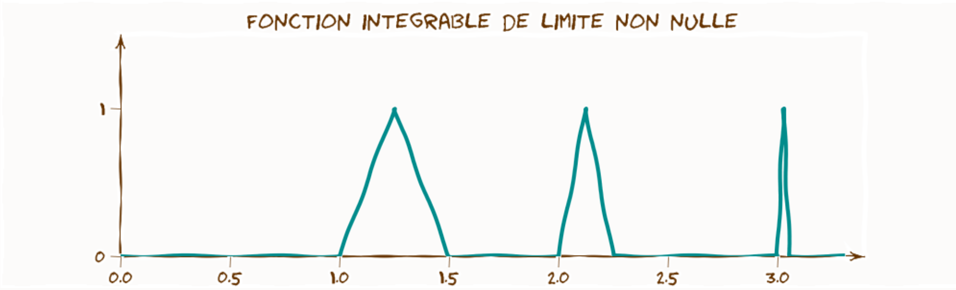
Exercice 1 : Cas particulier d'intégrales de Bertrand

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

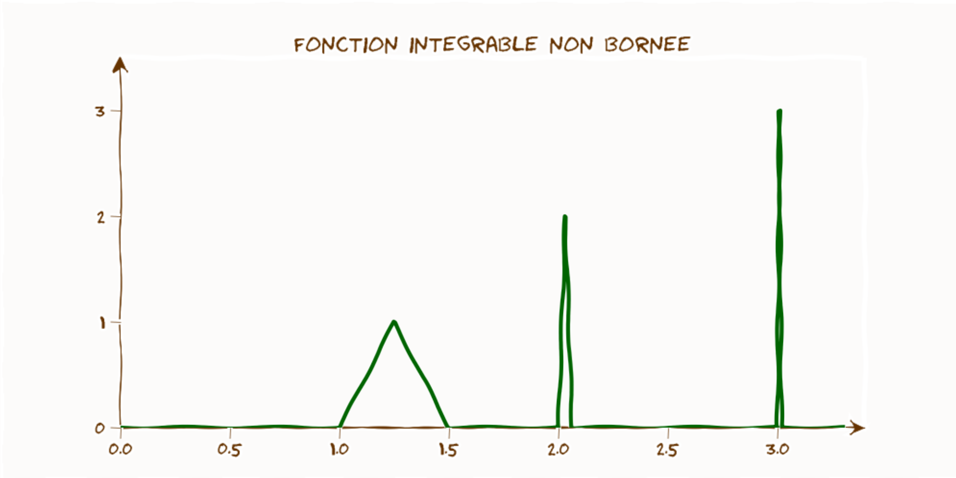
Remarque

R 2 – ⚠ $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow u_n \to 0$. Ce n'est plus le cas pour la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.

Par exemple, si on considère la fonction f nulle partout sauf entre n et $n+\frac{2}{n^2}$ où elle dessine un triangle isocèle de hauteur 1, d'aire $\frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$. Alors $f \geqslant 0$, $\int_a^x f \leqslant \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} - 1$ et $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante donc $\int_a^{+\infty} f$ converge, et pourtant $f(x) \not\to 0$ lorsque $x \to +\infty$.



On peut même construire une fonction f non bornée dont l'intégrale converge : il suffit que les triangles soient de hauteur n et de base $\dfrac{2}{n^3}$.



Par contre, si f a une limite non nulle, l'intégrale diverge.

Propriété 3 : Linéarité

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent.

Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f+\lambda g)$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (f+\lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$

Démonstration

$$\int_a^{x} (f+\lambda g) = \int_a^{x} f + \lambda \int_a^{x} g \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$

■

Propriété 4 : Choix de la borne inférieure

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $b \in [a,+\infty[$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ ont même nature.

Si elles convergent, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^{b} f + \int_b^{+\infty} f$.

Démonstration

$$\int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x f.$$

Propriété 5 : Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$

Soient $f \in \mathscr{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ tel que $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Alors $\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $\varphi' = -f$.

Démonstration

Soit F primitive de f qui s'annule en a. La convergence de l'intégrale donne celle de F en $+\infty$.
Alors $\varphi : x \mapsto \lim_{+\infty} F - F(x) = \int_a^{+\infty} f - F(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi = -f$.

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété 6 : Cas des fonctions réelles positives

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante, et $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si F est majorée.

Démonstration

Attention, f est seulement continue par morceaux : pas de théorème fondamental de l'analyse. On prend $x \leqslant y$ et on écrit que $F(y) - F(x) = \int_x^t f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positifvité de l'intégrale et bornes bien ordonnées.

Le théorème de la limite monotone permet de conclure.

Définition 2 : Intégrale de fonction positive

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

On pose $\int_a^{+\infty} f$ la limite finie ou $+\infty$ de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Remarque

R3 – On se permet donc d'écrire $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence, **seulement dans le cas où f est à valeurs réelles positives.**

Théorème 1 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, tel que

H1 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *converge*

H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } +\infty,\ 0 \leqslant f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(g),$$

alors

C1 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

Remarque

R4 – Similaire aux séries.
Il est indispensable que les fonctions soient à valeurs positives !

Démonstration

Dans tous les cas, $f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g)$. On a $A, M \in [a, +\infty[$ tel que si $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant Mg(x)$.

Alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + M\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t$ qui est majoré car convergent. ■

Théorème 2 : Divergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, tel que

H1 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *diverge*

H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } +\infty,\ 0 \leqslant g \leqslant f \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(f) \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(f),$$

alors

C1 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *diverge.*

Démonstration

Contraposée. ■

Théorème 3 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ ont même nature.

Démonstration

Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(f)$. ■

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 3 : Fonction intégrable

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a,+\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente.**

On note $f \in L^1([a,+\infty[,\mathbb{K})$.

Exemple

E 3 – Intégrales de Riemann : $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

E 4 – Intégrales exponentielles : $x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème 4 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
La réciproque est fausse en général mais vrai pour des fonctions de signe constant.

Remarque

R 5 – Le programme stipule que « Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. »
C'est puissant ! On peut travailler dans $[0,+\infty]$ lorsque la fonction est positive, et obtenir l'intégrabilité lorsque le résultat n'est pas $+\infty$.

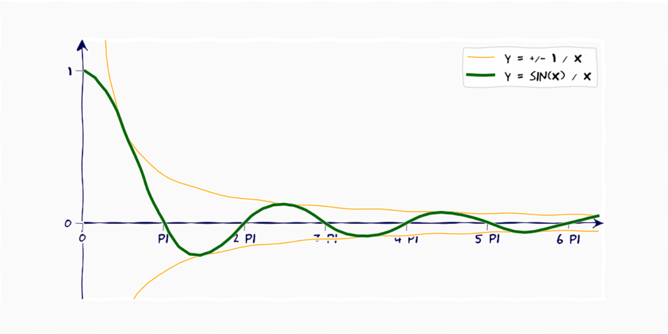
R 6 – Une intégrale $\int_a^{+\infty} f$ convergente mais non absolument convergente et dite semi-convergente.

R 7 – Comme on l'a vu avec cet exemple, dans la pratique, pour procéder à une intégration par partie, on se ramène à une borne finie x puis on passe à la limite. Cela éviter de risquer d'écrire des termes qui n'existent pas. Voir plus loin.

Démonstration

Similaire à la preuve pour les séries.

- On suppose f à valeurs réelles. On introduit les parties positives et négatives de f : $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2} : x \mapsto \max(f(x),0) \geqslant 0$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2} : x \mapsto \max(-f(x),0) \geqslant 0$.
  Comme f^+ et f^- sont positives et majorées par $|f|$ qui est telle que $\int_a^{+\infty} |f|$ converge (donc intégrable), c'est aussi le cas de f^+ et f^- et donc de $f = f^+ - f^-$.
- Si f est à valeurs complexes, il suffit de remarquer que $|\mathfrak{Re}\, f| \leqslant |f|$ et $|\mathfrak{Im}\, f| \leqslant |f|$ et d'utiliser le cas réel.
- Pour la réciproque fausse, on s'intéresse à l'exemple très classique $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
  Par intégration par parties, si $x \geqslant \pi$, $\int_\pi^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{1}{\pi} + \int_\pi^x \dfrac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, avec $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ donc $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $-\dfrac{1}{\pi} + \int_\pi^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
  Or si $k \geqslant 2$, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \dfrac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{1}{k\pi}\int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = 2$ par le changement de variable $u = t-(k-1)\pi$.
  Alors $\int_\pi^{n\pi} \dfrac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: l'intégrale n'est pas absolument convergente.



Théorème 5 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

- *On suppose que*

  H1 g *est intégrable sur* $[a,+\infty[$

  H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } +\infty,\ f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} o(g),$$

  alors

  C1 f *est intégrable sur* $[a,+\infty[$.

- *Si* $f \underset{+\infty}{\sim} g$, *alors* f *est intégrable sur* $[a,+\infty[$ *si et seulement si* g *l'est.*

Remarque

R8 – Si les fonctions ne sont pas à valeurs positives, on met des valeurs absolues/modules.
Ainsi, si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$ tel que g est intégrable sur $[a,+\infty[$ et $(f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g)$ ou $f \underset{+\infty}{=} o(g))$, alors $(|f| \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(|g|)$ ou $|f| \underset{+\infty}{=} o(|g|))$ donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.
Et si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |g|$ converge.

Corollaire 1 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

- *On suppose que*

  H1 *g est intégrable sur $[a, +\infty[$*

  H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

  $$\text{Au voisinage de } +\infty,\ |f| \leqslant |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(g),$$

  alors

  C1 *f est intégrable sur $[a, +\infty[$.*

- *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.*

Exercice 2 : CCINP 25 question 1. : Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 : Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 : Classique : intégrales de Bertrand

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si

$$\alpha > 1 \text{ **ou** } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

(Même résultat que sur les séries, mais c'est plus simple à démontrer.)

On a $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ fonction réelle positive sur $[2, +\infty[$.

- Si $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{x} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ non intégrable sur $[2, +\infty[$, donc f non plus par comparaison.
- Si $\alpha > 1$, $\gamma \in]1, \alpha[$, $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \underset{x \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma} \geqslant 0$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ donc f l'est par comparaison.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t} = \left[\frac{-1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} t}\right]_2^x = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} 2} - \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}$ qui converge si et seulement si $\beta > 1$.
- Si $\alpha = \beta = 1$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \big[\ln|\ln t|\big]_2^x = \ln\ln x - \ln\ln 2 \to +\infty$.

4 Comparaison série-intégrale (complément)

Le résultat suivant est désormais hors-programme mais intéressant.

Exercice 6

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

H1 f **est continue par morceaux,**

H2 f **est décroissante,**

H3 f **est positive**

alors

C1 $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ **converge si et seulement si** f **est intégrable sur** $[n_0, +\infty[$.

II INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 4 : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

Lorsque f **est à valeur réelles positives** et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

On dit que f est **intégrable** sur $[a, b[$ (respectivement $[a, b[$) lorsque $\int_a^b |f|$ converge, et on note $f \in L^1([a, b[, \mathbb{K})$ (respectivement $f \in L^1(]a, b], \mathbb{K})$.)

Remarque

R 9 – On dit aussi que f est intégrable en b (respectivement en a).

R 10 – Si la borne ouverte est finie et que f possède une limite finie au point, il suffit de faire un prolongement par continuité : on est ramené à une intégrale sur un segment.
Par exemple, $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge sans problème.

R 11 – Le programme stipule que « Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence », comme dans le chapitre sur la sommabilité.

R 12 – Les anciens programmes parlaient d'intégrale **impropre en** b.

Exemple

E 5 – $\tan$ n'est pas intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Propriété 7 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *(respectivement* $]-\infty,-1]$*) si et seulement si* $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $]0,1]$ *(respectivement* $[-1,0[$*) si et seulement si* $\alpha < 1$.
- *Pour* $\alpha = 1$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *n'est intégrable ni en* 0, *ni en* $\pm\infty$.

Démonstration

Si $0 < a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln b - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

Sinon, il suffit de faire un changement de variable $x \mapsto -x$ pour s'y ramener.

On passe aussi de $[1,+\infty[$ à $]0,1]$ par changement de variable $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. ■

Exemple

E 6 – $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge mais $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ divergent.

Théorème 6 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$.

- *Si* g *est intégrable sur* $[a,b[$ *et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$\text{Au voisinagede } b,\ |f| \leqslant |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g),$$

  alors f *est intégrable sur* $[a,b[$.
- *Si* $f \underset{b}{\sim} g$, *alors* f *est intégrable sur* $[a,b[$ *si et seulement si* g *l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$ *en comparant au voisinage de* a.

Propriété 8 : Indépendance du choix de l'autre borne

Soit f *continue par morceaux sur* $[a,b[$, $c \in [a,b[$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_c^b f$ *converge.*

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$.

Démonstration

$\displaystyle\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$ ■

Propriété 9 : Cas d'une fonction prolongeable par continuité

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f a une limite finie en b, c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors f est intégrable sur $[a, b[$.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.

Remarque

R 13 – Les anciens programmes parlaient d'intégrale **faussement impropres**.

Démonstration

Il suffit de voir que $\int_a^x |f| = \int_a^x |\tilde{f}|$ ou bien de remarque qu'au voisinage de b, $f = \mathcal{O}(1)$, donc f est intégrable sur $[a, b[$ par comparaison. ∎

2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition 5 : Convergence d'intégrale et intégrabilité sur un intervalle ouvert

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que f est **intégrable** sur $]a, b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge et on note $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$.

Exemple

E 7 – Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ diverge.

Remarque

R 14 – ⚠ Il faut démontrer la convergence des deux intégrales séparément !

Exemple

E 8 – $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t$ diverge alors que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\int_{-x}^{x} \tan t\,\mathrm{d}t = 0$.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème 7 : L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I. Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f$ converge.

Propriété 10 : Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$

- *L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cet espace vectoriel est noté $L^1(I,\mathbb{K})$.*
- *L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.*

Remarque

R 15 – Donc si f,g intégrables sur I, alors $\int_I (\alpha f+\beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

R 16 – ⚠ Comme pour les séries, il faut y réfléchir à deux fois avant de séparer une intégrale généralisée en deux : on a vite fait de manipuler des termes qui n'existent pas... Mais dans le cas des fonctions **positives**, le programme autorise de travailler dans $[0,+\infty]$.

R 17 – C'est encore le cas en prenant plus généralement les fonctions dont l'intégrale converge. Cependant, l'espace vectoriel en question n'a pas de nom particulier.

Démonstration

On traite le cas où $I=[a,b[$. Le cas où $I=]a,b]$ est similaire et celui où $I=]a,b[$ s'en déduit.
Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, on passe à la limite dans l'inégalité triangulaire intégrale en séparant en deux. ∎

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I,

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Propriété 12 : Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \mathfrak{Re}(f)$ et $\int_I \mathfrak{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \mathfrak{Re}(f) + \mathrm{i}\int_I \mathfrak{Im}(f)$.

Démonstration

Propriété générale sur les limites de fonctions. ∎

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale

Méthode 1 : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle bornée sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable. C'est le cas par exemple si la fonction est continue et prolongeable par continuité en une borne ouverte (et c'est alors encore plus simple à justifier : il suffit de considérer l'intégrale sur un segment du prolongement, qui ne présente pas de problème).
- Si I est un intervalle ouvert $]a,b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a,b[$ et on est ramené à une étude sur $]a,c]$ et $[c,b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \cdots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.

S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.

Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

Exercice 7 : $x \mapsto \cos^3(1/x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 8 : Étudier l'existence de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : Existence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

R 18 – ⚠ Mauvaise rédaction :

$$\left| \int_0^x e^{-t} \sin(xt) \, dt \right| \leqslant \int_0^x e^{-t} \, dt \leqslant 1 \ldots$$

Comme pour les séries, c'est à la fonction qu'on s'intéresse et non aux « intégrales partielles ».

Exercice 10 : CCINP 28

III Propriétés des intégrales généralisées

1 Relation de Chasles

La notion d'intégrale généralisée se... généralise au cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens.

Propriété 13 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

(i) *Si J sous-intervalle de I, alors $\int_J f$ converge.*

(ii) *Si $a, b, c \in \overline{I}$ éventuellement infinis,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

toutes ces intégrales étant bien convergentes.

Démonstration

Si, par exemple, $a, c \in I$ et $b \notin I$ borne supérieure de I Il suffit de faire $x \to +\infty$ dans la relation de Chasles $\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$.

Les autres cas se traitent de manière similaire. ■

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriété 14 : liée à l'ordre

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité $f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_I f \geqslant 0.$

Croissance $f \leqslant g \Longrightarrow \int_I f \leqslant \int_I g.$

Intégrale nulle *Si f est positive, **continue** et intégrable sur I et si $\int_I f = 0$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.*

*De façon équivalente, si f est positive, **continue**, intégrable non identiquement nulle sur I alors $\int_I f > 0$.*

Démonstration

On traite le cas où $I = [a, b[$.

Simples passages à la limite pour les deux premiers.

Pour l'intégrale nulle, $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante et positive, donc si sa limite est nulle elle est constamment nulle, il suffit alors d'appliquer la positivité améliorée sur le segment $[a, x]$. ■

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété 15 : Dérivation

Les bornes ouvertes peuvent être éventuellement infinies.

*Si f est **continue** sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ et $g' = -f$.*

*Si f est **continue** sur $]a,b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et $h' = f$.*

Remarque

R 19 – Se retrouve avec une primitive.

Démonstration

F primitive de f qui s'annule en a.

$g : x \mapsto \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ et $g'(x) = -f(x) + 0$. ∎

IV CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES

1 Changement de variable

Théorème 8 : Changement de variable

*Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une **bijection de classe** $\mathscr{C}^1$. Alors φ est strictement monotone.*
On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\alpha]{} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\beta]{} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Démonstration

On traite le cas où φ est strictement croissante : les bornes restent « dans le bon sens ».
si $x, y \in]\alpha,\beta[$, on peut appliquer la formule de changement de variable sur le segment $[x,y]$:

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t)\,dt = \int_x^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

Ensuite, si $x \to \alpha$, alors $\varphi(x) \to a$ et si $y \to \beta$, alors $\varphi(y) \to b$. Donc, il y a convergence (ou convergence absolue) dans le membre de droite lorsque $x \to \alpha$ puis $y \to \beta$ si et seulement si $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ converge (ou converge absolument).

Comme φ est bijective et bicontinue (via le théorème de la bijection), $\int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t)\,dt = \int_{x'}^{y'} f(t)\,dt$ où $x = \varphi^{-1}(x')$ et $y = \varphi^{-1}(y')$. Alors $x \to \alpha \iff x' \to a$ et $y \to \beta \iff y' \to b$. Donc le membre de gauche converge si et seulement si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. ∎

Remarque

R 20 – Même nature est à prendre au sens convergentes ou divergentes ou absolument convergentes ou semi-convergentes.
C'est donc **très utile** pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

R 21 – Le programme autorise l'utilisation sans justification dans les cas usuels : φ fonction affine, puissance, exponentielle, logarithme.

R 22 – Mais il vaut mieux insister. Faire un changement de variable avec une rédaction de la forme :« Changement de variable $t = \varphi(u)$ où $\varphi : \cdots \to \cdots$ **bijective et de classe $\mathscr{C}^1$** ». On peut alors exprimer $u = \varphi^{-1}(t)$.

R 23 – Sur un segment, la bijectivité n'était pas nécessaire, ici elle l'est.

Exercice 11 : Trouver un lien entre l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice 12 : Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ à l'aide des intégrales de Wallis $W_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^k t\,dt$.

Exercice 13 : Déduire de l'étude des intégrales de Bertrand en $+\infty$, celle de ces mêmes intégrales en 0, à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

Propriété 16 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (respectivement $]a, b]$) si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration

Changement de variable affine $t = x - a$. ■

Remarque

R 24 – Plus généralement, via un changement de variable, la fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par partie sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

Remarque

R 25 – Le programme donne tout de même un résultat, qu'on évitera d'utiliser : si f et g ont des limites finies en a et en b (« si le crochet existe »), les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes (mais seulement l'une peut être semi-convergente contrairement au changement de variable). Et en cas de convergence, on peut écrire

$$\int_a^b f'g = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b fg'$$

(ou le crochet est à prendre au sens des limites.)

Il est largement préférable, dans la pratique, de repasser par une intégration par partie classique sur un segment, avant de passer à la limite.

Exemple

E 9 – Par exemple,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
n'est pas acceptable. On peut, en modifiant légèrement ce calcul, le rendre néanmoins exact, et en déduire la surprenante relation
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t.$$
$\Big($ce qui est encore plus surprenant, c'est que l'on a également $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.$\Big)$

Exercice 14 : Si $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

V Intégration des relations de comparaison

Théorème 9 : Intégration des relations de comparaison

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs ***réelles positives****.*

Cas de divergence *Si $\int_a^b g$ diverge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_a^x g\right)$*

(ii) *si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g\right)$*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.

Cas de convergence *Si $\int_a^b g$ converge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$, alors f intégrable et $\int_x^b f = \underset{b}{\mathrm{O}}\left(\int_x^b g\right)$*

(ii) *si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors f intégrable et $\int_x^b f = \underset{b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f intégrable et $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$*

Remarque

R 26 – Noter l'analogie avec les sommes partielles et les restes des séries.

R 27 – Comme pour les séries, la fonction de référence est toujours à valeurs réelles positives.

Démonstration

Similaire aux séries. On traite le cas ou $I = [a,b[$.

Cas de convergence

(i) $|f| = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$ donc f est intégrable et on a $M \in \mathbb{R}^+$ et un réel $c \in [a,b[$ tel que si $x \in [c,b[$, $|f(x)| \leqslant Mg(x)$ (valable si $b = +\infty$). Si $x \in [c,b[$,
$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant M \int_x^b g$$
donc $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_x^b g\right)$.

(ii) $|f| = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$ donc f est intégrable et si $\varepsilon > 0$, on a un réel $c \in [a,b[$ tel que si $x \in [c,b[$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$ (valable si $b = +\infty$). Si $x \in [c,b[$,
$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \varepsilon \int_x^b g$$

donc $\displaystyle\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$.

(iii) Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $h = f - g = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$ est intégrable et $\displaystyle\int_x^b h = \int_x^b f - \int_x^b g = \underset{b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$ par (ii).

Donc $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

Cas de divergence

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un réel $c \in [a, b[$ tel que si $x \in [c, b[$, $|f(x)| \leqslant M g(x)$ (valable si $b = +\infty$). Si $x \in [c, b[$,

$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \int_c^x |f| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + M\int_c^x g = \left|\int_a^c f\right| - M\int_a^c g + M\int_a^x g$$

avec $\displaystyle\int_a^x g \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, donc on a $d \in [c, b[$ tel que si $x \in [d, b[$, $\displaystyle\left|\int_a^c f\right| - M\int_a^c g \leqslant \int_a^x g$.

Ainsi, pour $x \in [d, b[$, $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leqslant (M+1)\int_a^x g$ et $\displaystyle\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathcal{O}}\left(\int_a^x g\right)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un réel $c \in [a, b[$ tel que si $x \in [c, b[$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} g(x)$. Si $x \in [c, b[$,

$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \int_c^x |f| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_c^x g = \left|\int_a^c f\right| - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g$$

avec $\displaystyle\int_a^x g \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, donc $\displaystyle\int_a^x g > 0$ au voisinage de b et $\dfrac{\left|\int_a^c f\right| - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g}{\int_a^x g} \xrightarrow[x\to b]{} 0$ donc on a $d \in [c, b[$ tel que si $x \in [d, b[$, $\displaystyle\left|\int_a^c f\right| - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g$.

Ainsi, pour $x \in [d, b[$, $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leqslant \varepsilon\int_a^x g$ et $\displaystyle\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g\right)$.

(iii) Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $h = f - g = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$. Donc $\displaystyle\int_a^x h = \int_a^x f - \int_a^x g = \underset{b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g\right)$ par (ii).

Donc $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$ ∎

Exercice 15 : Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. **Déterminer la limite de** $f(x)$ **en** $+\infty$.
2. **Déterminer un équivalent de** f **en** $+\infty$.

---

1. $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann divergente.
2. Intégration par parties : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2} = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{t^2}\right)$ et application du théorème dans le cas de divergence, et $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ négligeable devant $f(x)$ qui tend vers $+\infty$, donc $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \mathrm{o}\left(f(x)\right)$.