13

Régularité des suites et séries de fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Suites de fonctions

1 Intégration sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1

H2

alors

C1

C2

Méthode 1 : (nouvelle) Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1 : CCINP 10, 48

Théorème 2 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1

H2

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1

C2

Remarque

R 1 – En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a,b]$, on obtient bien $F_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(b)$.

2 Dérivation

Théorème 3 : Interversion limite et dérivée (classe $\mathscr{C}^1$)

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Remarque

R 2 – Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n, mais hors-programme.

Théorème 4 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Remarque

R 3 – Pour obtenir une classe $\mathscr{C}^\infty$, il suffit que les f_n le soit et que la convergence des $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ soit uniforme au moins à partir d'un certain rang. En général, elle l'est à partir du rang 1 d'où l'énoncé suivant.

Théorème 5 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^\infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

II Séries de fonctions

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème 6 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1

H2

alors

C1

C2

C3

Exercice 2 : CCINP 14

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ **converge normalement sur** $[0,1]$ **puis déterminer** $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2 Primitive

Théorème 7 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1

H2

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1

C2

3 Classe $\mathscr{C}^k$

Théorème 8 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Théorème 9 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

Exercice 4 : CCINP 16

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.
Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$.
Calculer f' et étudier les variations de f.

Exercice 6

1. Montrer que $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de ses dérivées sous forme de somme.
2. Étudier la convexité de ζ.
3. Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.