13

Régularité des suites et séries de fonctions

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
Séries de fonctions	
Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes ci-dessus.	
Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.	

Table des matières

13 Régularité des suites et séries de fonctions 1
I Suites de fonctions 2
1 Intégration sur un segment . . . 2
2 Dérivation . . . 3
II Séries de fonctions 5
1 Intégration sur un segment . . . 5
2 Primitive . . . 5
3 Classe $\mathscr{C}^k$ . . . 6

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Suites de fonctions

1 Intégration sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale

Si $a,b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

On suppose $a\leqslant b$ quitte à multiplier par -1.
f_n-f est bornée à partir d'un certain rang, et à partir de ce rang, on peut écrire

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\,\|f_n-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Méthode 1 : (nouvelle) Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 1 : CCINP 10, 48

Théorème 2 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Démonstration

Sur un segment $[b,c]$ de I, on note $m = \min(a,b,c)$ et $M = \max(a,b,c)$. On calcule

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant |x-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,[a,x]} \leqslant (M-m)\, \|f_n - f\|_{\infty,[m,M]} \to 0$$

d'où la conclusion. ■

Remarque

R 1 – En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a,b]$, on obtient bien $F_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(b)$.

2 Dérivation

Théorème 3 : Interversion limite et dérivée (classe $\mathscr{C}^1$)

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = g$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ ».*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Remarque

R 2 – Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n, mais hors-programme.

Démonstration

- Le théorème de transfert de continuité nous donne déjà la continuité de g sur I (avec **H1** et **H3**).
- Soit $a \in I$. On pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$ et $F : x \mapsto \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème précédent, (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I, donc en particulier converge simplement vers F.

Or pour tout $x \in I$, $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) - f(a)$, donc par unicité de la limite, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée g.

- Si S segment de I, $x \in S$,

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|F_n(x) + f_n(a) - F(x) - f(a)\right| \leqslant |F_n(x) - F(x)| + \left|f_n(a) - f(a)\right| \leqslant \|F_n - F\|_{\infty,S} + \left|f_n(a) - f(a)\right|$$

qui est indépendant de x et converge vers 0. Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I. ■

Théorème 4 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction g_j sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *$f = g_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = g_j$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ ».*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Démonstration

On applique le théorème précédent à toutes les dérivées successives, de la n° k à la n° 1. ■

Remarque

R 3 – Pour obtenir une classe $\mathscr{C}^\infty$, il suffit que les f_n le soit et que la convergence des $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ soit uniforme au moins à partir d'un certain rang. En général, elle l'est à partir du rang 1 d'où l'énoncé suivant.

Théorème 5 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^\infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$ ».*

II SÉRIES DE FONCTIONS

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème 6 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 2 : CCINP 14

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ **converge normalement sur** $[0, 1]$ **puis déterminer** $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Réponse : $2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

2 Primitive

Théorème 7 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

3 Classe $\mathscr{C}^k$

Théorème 8 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Exercice 4 : CCINP 16

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$.

Calculer f' et étudier les variations de f.

Théorème 9 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

Exercice 6

1. Montrer que $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de ses dérivées sous forme de somme.
2. Étudier la convexité de ζ.
3. Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.