# 12

# Fonctions numériques
# Continuité, continuité uniforme, dérivabilité, convexité, intégration sur un segment (MP2I)

# Table des matières

Dans tout le chapitre, $I$ désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# I CONTINUITÉ

## 1 Définition

**Définition 1 : Continuité**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.
$f$ est dite continue en $a$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. $f$ est dite **continue sur** $I$ lorsque $f$ est continue en tout point de $I$.
On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

**Remarque**

**R 1** – Ainsi, $f$ n'est pas continue en $a$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$

**R 2** – $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est définie en $a$ et a une limite finie en $a$.

**R 3** – $f$ est continue en $a$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le dont.

**Propriété 1 : Caractérisations séquentielles**

$$\begin{aligned} &(i)\ f \text{ est continue en } a \\ \iff &(ii)\ \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a). \\ \iff &(iii)\ \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ (f(a_n)) \text{ converge}. \end{aligned}$$

**Démonstration**

On montre $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$.

Si $f$ est continue en $a$, et si $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$, on se donne $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Or on a un rang $N$ à partir duquel $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$. don, pour $n \geqslant N$, $|f(a_n) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, ce qui donne bien $f(a_n) \to f(a)$ et donc en particulier converge.

Si pour toute suite $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge, on montre que toutes les limites valent $f(a)$. Soit une telle suite $(a_n)$ et $\ell$ la limite respective de $(f(a_n))$. En considérant une suite $(a'_n)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = a$ on a bien $b_n \to a$ donc $f(b_n)$ converge vers une limite nécessairement égale à $\ell$ et à $f(a)$ par extraction, donc $\ell = f(a)$. Finalement, toutes les limites des suites $(f(a_n))$ sont égales à $f(a)$.

La dernière implication se traite classiquement par contraposée : on suppose que $f$ n'est pas continue en $a$, ce qui fournit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, on ait $x \in I$ vérifiant $|x-a| \leqslant \eta$ et pourtant $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut l'appliquer à $\eta = \frac{1}{2^n}$ ce qui fournit $a_n \in I$ tel que $|a_n - a| \leqslant \eta$ et $|f(a_n) - f(a)| > \varepsilon$. On construit bien ainsi une suite $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$ et $f(a_n) \not\to f(a)$. ∎

**Remarque**

**R 4** – Une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues l'est encore.
$\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{K}^I, +, \times, \cdot)$.

**R 5** – Être continue en $a$ est équivalent à être continue à gauche et à droite de $a$.

Voir exercice du TD : 7, 8

## 2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

**Théorème 1 : des valeurs intermédiaires**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in [f(a), f(b)]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$. Autrement dit,*

$$[f(a), f(b)] \subset f([a, b]).$$

*Extension : Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ et admet des limites $\lim\limits_{a^+} f$ à droite de $a$ et $\lim\limits_{b^-} f$ à gauche de $b$, alors pour tout $m \in \left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$, on a $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = m$. Autrement dit,*

$$\left]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\right[ \subset f(]a, b[).$$

**Remarque**

**R 6 –** $[f(a), f(b)]$ signifie $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ selon la position relative de $f(a)$ et $f(b)$.

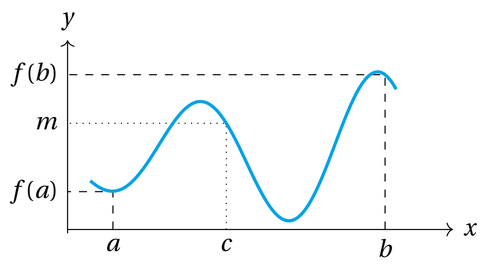


Figure 1 – Le théorème des valeurs intermédiaires

**Remarque**

**R 7 –** La réciproque est fausse : on peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continu.

C'est le cas par exemple de la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$ discontinue en $0$.

**Exercice 1**

**Montrer qu'un polynôme réel de degré impair a toujours au moins une racine réelle.**

En effet, comme on a des limites $\pm\infty$ ou $\mp\infty$ en $\pm\infty$, notre polynôme continu prend au moins une valeur positive et une valeurs négative sur $\mathbb{R}$.

**Voir exercice du TD : 9, 10, 11**

**Corollaire 1 : Image continue d'un intervalle**

*L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*
*Autrement dit, si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f(I)$ est un intervalle.*

**Remarque**

**R8** – ⚠ En général $f([a,b[) \neq [f(a), f(b)[$ et $f(]a,b[) \neq \left]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\right[$.

**R9** – Le type de l'intervalle n'est pas conservé en général.

**Théorème 2 : des bornes atteintes**

*Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*
*Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si $f$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors on a $c, d \in [a,b]$ tels que $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.*

**Corollaire 2 : Image continue d'un segment**

*L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*
*Avec les notations précédentes, $f$ étant continue sur $[a,b]$,*

$$f\big([a,b]\big) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] = [f(c), f(d)]$$

**Propriété 2 : Stricte monotonie d'une fonction continue injective sur un intervalle**

*Si $f$ est continue et injective sur un intervalle $I$, $f$ est strictement monotone sur $I$.*

**Théorème 3 : de la bijection**

*Soit $I$ un intervalle et $f$ définie au moins sur $I$, à valeurs réelles. On suppose que*

**H1** *$f$ est continue sur $I$.*

**H2** *$f$ est strictement monotone sur $I$.*

*Alors*

**C1** *$f$ induit une bijection $\tilde{f}$ de $I$ sur $J = f(I)$.*

**C2** *$\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que $f$.*

**C3** *$\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $J$.*

**Définition 2 : Homéomorphisme (HP)**

$f : I \to J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque $f$ est bijective et bicontinue, c'est-à-dire $f$ continue sur $I$ et $f^{-1}$ est continue sur $J$.

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

**Théorème 4 : Théorème de l'homéomorphisme**

*Toute fonction continue strictement monotone induit de $I$ sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.*

## 3 Uniforme continuité

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point $a$, si je me reproche de $a$, alors mon image par $f$ se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in I,\ \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

**Définition 3 : Uniforme continuité**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $f$ est **uniformément continue** sur $I$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x, y \in I,\ \ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela impose que si $x$ et $y$ sont suffisamment proches, mais n'importe où dans $I$, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

**Propriété 3 : UC ⇒ Continue**

*Une fonction uniformément continue sur $I$ est continue sur $I$. Réciproque fausse.*

**Démonstration**

Si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall a, x \in I,\ \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

alors

$$\forall a \in I,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in I,\ \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Propriété 4 : Caractérisation séquentielle**

*$f$ est uniformément continue sur $I$ si et seulement si*

$$\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ \ f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**Remarque**

**R 10 –** N'apparaît pas dans le programme officiel, mais très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

**Démonstration**

($\Rightarrow$) Si $f$ uniformément continue et $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon > 0$.

On a $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in I,\ \ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$ or on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \ x_n - y_n \leqslant \eta$, ainsi $\forall n \geqslant N,\ \ f(x_n) - f(y_n) \leqslant \varepsilon$ et donc $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

($\Leftarrow$) Par contraposée, si $f$ n'est pas uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0,\ \ \exists x, y \in I,\ \ \left|x - y\right| \leqslant \eta$ et $\left|f(x) - f(y)\right| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, on a $x_n, y_n$ des réels tels que $\left|a_n - y_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\left|f(x_n) - f(y_n)\right| > \varepsilon$. Ainsi, $x_n - y_n \to 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. $\blacksquare$

**Propriété 5 : Stabilités**

*Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.*

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

**Exemple**

**E 1 –** $f : x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**E 2 –** $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ : problème si $x \to \pm\infty$ (pente trop forte). $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0$.

**E 3 –** $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (malgré la pente infinie en 0) : si $x_n - y_n \to 0$, on peut supposer $x_n \geqslant y_n$, alors
$$\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n \leqslant x_n - 2y_n + y_n = x_n - y_n \to 0.$$
Donc $\left|\sqrt{x}_n - \sqrt{y}_n\right| \leqslant \sqrt{|x_n - y_n|}$. Donc $\sqrt{x}_n - \sqrt{y}_n \to 0$.

**E 4 –** $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ problème si $x \to 0$ (pente trop forte).
$x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = -\frac{n}{2} \not\to 0$.

**Remarque**

**R 11 –** La fonction $\sqrt{\cdot}$ vérifie
$$\forall\, x, y, \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant k \times |x - y|^{1/2},$$
on dit qu'elle est $1/2$-hölderienne. Toute fonction $\alpha$-hölderienne est facilement uniformément continue.

**Théorème 5 : de Heine**

*Tout fonction continue sur un **segment** est uniformément continue sur ce segment.*

**Démonstration**

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue non uniformément continue, on a $\epsilon > 0$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et pour tout $n$, $f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$. (voir preuve de la caractérisation séquentielle).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée $x$ une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$, puis de la suite bornée $\left(y_{\varphi(n)}\right)_n$ une suite convergente $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$. Alors $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$ est aussi convergente comme suite extraite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ et $x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)} \to 0$ donc les deux limites sont égales à $\ell$.

Alors, par continuité, $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ et $f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ donc
$$f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to 0$$
ce qui contredit $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) > \varepsilon$. ■

**Voir exercice du TD : 12, 13, 14**

## 4 Application au théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier

On redonne la définition d'une fonction continue par morceaux et on utilise le théorème de Heine pour démontrer le théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier, résultat à la base de la construction de l'intégrale de Riemann sur un segment.

**Définition 4 : Fonctions continues par morceaux**

Une application $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ (avec $a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b$, donc) telle que

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \begin{cases} f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.}\\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}.\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \begin{cases} f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.}\\ f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k,a_{k+1}].\end{cases}$$

On dit alors que $\sigma$ est **adaptée** à $f$.
On note $\mathscr{C}_m([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.
$f:I\to\mathbb{K}$ est dite continue par morceaux (sur $I$) si sa restriction à tout segment l'est.

**Théorème 6 : Approximation uniforme des fonctions CPM sur un segment par des fonctions en escalier**

*Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*

**Démonstration**

**Cas continu** Soit $\varepsilon>0$. Par théorème de Heine, $f$ est uniformément continue sur $[a,b]$. On a donc $\eta>0$ tel que

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |x-y|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(a_{k+1}-a_k)\leqslant\eta$.

On définit alors $\varphi:x\mapsto\begin{cases} f(a_k) & \text{si } x\in[a_k,a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x=b\end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x\in[a,b[$, on a $k$ tel que $x\in[a_k,a_{k+1}[$ et $|x-a_k|\leqslant|a_{k+1}-a_k|\leqslant\eta$ donc $|f(x)-\varphi(x)|=|f(x)-f(a_k)|\leqslant\varepsilon$, soit $x=b$ et $|f(b)-\varphi(b)|=0\leqslant\varepsilon$.
On a donc bien $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

**Cas continu par morceaux** Soit $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ adaptée à $f$.
Chaque $f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction $f_k$ continue sur $[a_k,a_{k+1}]$ : on a $\varphi_k\in\mathscr{E}([a,b])$ telle que $\|f_k-\varphi_k\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

On pose alors $\varphi:x\mapsto\begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x\in]a_k,a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x=a_k\end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x\in[a,b]$, soit on a $k$ tel que $x\in]a_k,a_{k+1}[$ et $|\varphi(x)-f(x)|=|\varphi_k(x)-f_k(x)|\leqslant\varepsilon$ soit on a $k$ tel que $x=a_k$ et $|\varphi(a_k)-f(a_k)|=0\leqslant\varepsilon$.
On a donc bien $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

**Définition d'une suite** Quitte à prendre $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$ où $n\in\mathbb{N}$, on construit une suite $(\varphi_n)$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ \|f-\varphi_n\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^n}$, donc telle que $\varphi_n\xrightarrow{CU}f$. ■

# 5 Fonctions lipschitziennes

**Définition 5 : Fonction lipschitzienne**

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite $k$-lipschitzienne sur $X$ (où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$\forall x, y \in X, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|.$$

**Propriété 6 : Lipschitzienne $\Rightarrow$ UC**

*Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur $I$ y est uniformément continue. La réciproque est fausse.*

**Remarque**

**R 12 –** $f$ lipschitzienne $\not\Longleftarrow\Longrightarrow$ $f$ uniformément continue $\not\Longleftarrow\Longrightarrow$ $f$ continue.

Plus précisément :

$f$ lipschitzienne $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $f$ höldérienne $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $f$ uniformément continue $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $f$ continue.

**Démonstration**

$\forall x, y \in I, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|^{\alpha}$ ($\alpha = 1$ si lipschitzienne).
Donc si $x_n - y_n \to 0$, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. ■

**Exemple**

**E 5 –** $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne car si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant k\left|x - y\right|$$

avec $k > 0$, on va avoir un problème près de zéro (pente trop forte). Pour $y = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{x} \leqslant kx$ et si $x \neq 0$, $\sqrt{x} \geqslant \frac{1}{k}$ donc $x \geqslant \frac{1}{k^2}$. Contradiction.

**E 6 –** Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $\mathring{I}$ (c'est le cas si elle est de classe $\mathscr{C}^1$) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions $\sin$ et $\cos$.

# II Dérivabilité

## 1 Nombre dérivé et fonction dérivée

### a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

**Définition 6 : Nombre dérivé, fonction dérivée**

Soit $f: I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que $f$ **est dérivable en** $a$ si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de** $f$ **en** $a$.
Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

$f$ est dérivable sur $I$ si et seulement si $f$ est dérivable en tout point de $I$.
On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

**Remarque : Interprétation géométrique**

**R 13 –** Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \to a$. D'où l'équation de la tangente en $a$ : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Si $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \to +\infty$, $f$ n'est pas dérivable en $a$, mais il y a une tangente verticale.

**Propriété 7 : DL$_1$**

*$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$, c'est-à-dire si on peut écrire*

$$f(a+h) = f(a) + hb + h \cdot \varepsilon(h) = f(a) + hb + o(h)$$

*où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.*
*Dans ce cas, $b = f'(a)$.*

**Corollaire 3 : dérivable $\implies$ continue**

*Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*
*La réciproque est fausse.*

**Définition 7 : Dérivabilité à gauche, à droite**

Si $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. $f$ est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de $a$ lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de $a$, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

**Propriété 8 : Caractérisation de la dérivabilité**

*Si $a \in \overset{\circ}{I}$, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche et à droite de $a$ et $f'_g(a) = f'_d(a)$.*
*On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$*

### b Opérations algébriques

**Propriété 9 : Opérations algébriques**

*Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$*

(i) *$f + g$ dérivable en $a$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

(ii) *$f \times g$ dérivable en $a$ et*
$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) *$\lambda f$ dérivable en $a$ et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(iv) *Si $g$ ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

**Remarque**

**R 14 –** Plus généralement, si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en $a$, $f_1 \times \cdots \times f_n$ l'est aussi et
$$\left(f_1 \times \cdots \times f_n\right)'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_1(a) \dots, f_{k-1}(a) f'_k(a) f_{k+1}(a) \cdots f_n(a).$$

**Propriété 10 : Composée**

*Soient $I, J$ sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.*
*Si $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et*
$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).$$

**Remarque**

**R 15 –** Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle, composée de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

### c Dérivée d'une réciproque

**Propriété 11 : Dérivée d'une réciproque**

*Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et*
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Remarque**

**R 16 –** Si $f'(a)=0$, alors le graphe de $f$ admet une tangente verticale en $b=f(a)$.

**R 17 –** Dans tous les cas, la tangente en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y=x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à $\mathscr{C}_f$.

**R 18 –** Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

## 2 Dérivées successives et classe d'une fonction

**Définition 8 : Dérivées successives et classe d'une fonction**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque $f$ est dérivable $n$ fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{e}}$ tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout $k$, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, $f$ est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$** lorsque $f$ est $k$ fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur $I$. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$.
- $f$ est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$** lorsque $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque $f$ est indéfiniment dérivable.

**Remarque**

**R 19 –** On peut être $k$ fois dérivable sans être de classe $\mathscr{C}^k$.
Par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable en $0$ sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.

**Propriété 12 : Classe d'une dérivée**

*Si $n \geqslant 1$, $f$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si $f$ dérivable et $f'$ est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$). Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.*

**Propriété 13 : Opérations sur les dérivée d'ordre $n$**

*Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) *$f+g$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$ et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *$\lambda f$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$ et*

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***
*$f \times g$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$ et*

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, $\dfrac{f}{g}$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $J$, $f \circ g$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$.*

**Remarque**

**R 20** – Le formule de Faa di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

**Exercice 2 : CCINP 3**

**Propriété 14 : Fonctions usuelles**

*Les fonctions usuelles* $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, $\text{ch}$, $\text{sh}$, $\text{th}$, $\text{Arctan}$ *et polynomiales ou rationnelles sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur leur ensemble de définition.*

*Les fonctions* $\text{Arcsin}$ *et* $\text{Arccos}$ *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$.

$\sqrt{\cdot}$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

**Définition 9 : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)**

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque

- $f$ est bijective,
- $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$,
- $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $J$.

**Remarque**

**R 21** – Un $\mathscr{C}^0$-difféomorphisme est un homéomorphisme.

**Propriété 15 : Caractérisation (HP)**

*Soit* $f : I \to J$ *bijective de classe* $\mathscr{C}^k$ *avec* $k \geqslant 1$.

*Alors* $f$ *est un* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme (ie* $f^{-1}$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* $J$*) si et seulement si* $f'$ *ne s'annule pas sur* $I$.

**Remarque**

**R 22** – Comme $f'$ est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et $f$ est strictement monotone, donc injective automatiquement.

**Voir exercice du TD : 16, 18, 22**

# 3 Applications

## a Condition nécessaire d'extremum local

**Définition 10 : Extremum local**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que $f$ admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en $a$ lorsqu'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $\forall x \in I \cap V,\ \ f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que $f$ admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en $a$ lorsqu'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $\forall x \in (I \cap V) \setminus \{a\},\ \ f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

**Remarque**

**R 23 –** Ainsi, $f$ admet un minimum (respectivement maximum) local en $a$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0,\ \ \forall x \in I,\ \ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(x) \leqslant f(a)$). si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \ \forall h \in \mathbb{R},\ \ a+h \in I \text{ et } |h| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow f(a+h) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(a+h) \leqslant f(a)$).

**Définition 11 : point critique**

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que $f$ dérivable en $a$. On dit que $a$ est un **point critique** de $f$ lorsque $f'(a) = 0$.

**Propriété 16 : Condition nécessaire d'extremum local**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que*

**H1** $a \in \mathring{I}$

**H2** *$f$ est dérivable en $a$*

**H3** *$f$ admet un extremum local en $a$*

*Alors $a$ est un pont critique de $f$ : $f'(a) = 0$.*
*La réciproque est fausse.*

**Remarque**

**R 24 –** Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.

Voir exercice du TD : 19

### b Théorème de Rolle

**Théorème 7 : Théorème de Rolle**

*Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

**H1** $f$ *est continue sur* $[a,b]$

**H2** $f$ *est dérivable sur* $]a,b[$

**H3** $f(a) = f(b)$

*Alors* $\exists c \in ]a,b[, \quad f'(c) = 0$.

**Remarque**

**R 25 –** La conclusion s'écrit aussi $\exists t \in ]0,1[, \quad f'(a+th)) = 0$ où $h = b-a$.

**R 26 –** **Interprétation cinématique** : Si un mobile $M$ a une trajectoire **rectiligne** tel que $M(t_0) = M(t_1)$ alors il existe un instant $t \in ]t_0, t_1[$ tel que $v_M(t) = 0$.

**R 27 –** ⚠ : Faux pour des fonctions qui ne sont pas à valeurs réelles !

**Voir exercice du TD : 15, 16, 17**

### c Théorème des accroissements finis

**Théorème 8 : Théorème des accroissements finis**

*Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

**H1** $f$ *est continue sur* $[a,b]$

**H2** $f$ *est dérivable sur* $]a,b[$

*Alors* $\exists c \in ]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *ie*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c).$$

**Remarque**

**R 28 –** Le résultat s'écrit encore $\exists t \in ]0,1[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+t(b-a)) = 0$ ie $f(a+h) = f(a) + hf'(a+th)$ où $h = b-a$.

**R 29 –** Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

**R 30 –** Non valable pour des fonctions à valeurs complexes.

**Voir exercice du TD : 20, 21**

### d Inégalité des accroissements finis

**Théorème 9 : Inégalité des accroissements finis**

*Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a<b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

**H1** $f$ *est continue sur* $[a,b]$

**H2** $f$ *est dérivable sur* $]a,b[$

**H3** $\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in ]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

*Alors* $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

**Remarque**

**R 31 –** Lorsque $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$, comme $a<b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre $a$ et $b$ et retrouver le résultat.

**Corollaire 4 : 2ᵉ version**

*Soit* $f : I \to \mathbb{K}$. *Si*

**H1** $f$ *est continue sur* $I$

**H2** $f$ *est dérivable sur* $\mathring{I}$

**H3** $\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathring{I}, \quad |f'(x)| \leqslant k$

*Alors* $f$ *est* $k$*-lipschitzienne sur* $I$, *c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

**Remarque**

**R 32 –** En particulier, si $f$ est dérivable sur $\mathring{I}$, $f$ est lipschitzienne sur $I$ si et seulement si $f'$ est bornée sur $\mathring{I}$.

**R 33 –** Si $f$ est classe $\mathscr{C}^1$, on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leqslant k$ entre $x$ et $y$ (attention à l'ordre des bornes...)

**R 34 –** Cette fois, c'est aussi valable pour des fonctions à valeurs complexes.

### e Variations des fonctions dérivables

**Théorème 10 : Variations des fonctions dérivables**

*Soit* $f : I \to \mathbb{R}$, *continue sur* $I$, *dérivable sur* $\mathring{I}$.

(i) $f$ *est constante sur* $I$ *si et seulement si* $f' \equiv 0$ *sur* $\mathring{I}$.

(ii) $f$ *est croissante (respectivement décroissante) sur* $I$ *si et seulement si* $f' \geqslant 0$ *(respectivement* $f' \leqslant 0$*) sur* $\mathring{I}$.

(iii) $f$ *est strictement croissante (respectivement décroissante) sur* $I$ *si et seulement si* $f' \geqslant 0$ *(respectivement* $f' \leqslant 0$*) sur* $\mathring{I}$ *et* $\left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ *ne continent aucun intervalle d'intérieur non vide ie* $f'$ *ne s'annule qu'en des points isolés.*

**Remarque**

**R 35 –** ⚠ Si $f$ est définie sur $D$ réunion d'intervalles, $f' = 0$ dit que $f$ est constante sur chaque intervalle, $f' \geqslant 0$ dit que $f$ est croissante sur chaque intervalle...

**LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE !**

### f Théorème de la limite de la dérivée

**Théorème 11 : Théorème de la limite de la dérivée**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que*

**H1** *$f$ est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

**H2** *$f$ est continue en $a$*

**H3** *$f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$*

*Alors* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

*Donc*

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en $a$,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f$ est dérivable en $a$, $f'(a) = \ell$ et $f'$ est continue en $a$.*

**Remarque**

**R 36 –** Si $f'$ n'a pas de limite en $a$, on ne peut pas conclure.

**Exemple**

**E 7 –** $f : x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par $0$ en $0$.

**E 8 –** $f : x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par $0$ en $0$.

**R 37 –** Il faut que $f$ soit continue en $a$ : par exemple, $f : x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et pourtant $f$ n'est pas dérivable en $0$.

**R 38 –** Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement $\mathscr{C}^1$. Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

**Exercice 3 : CCINP 4**

**Théorème 12 : du prolongement $\mathscr{C}^k$ (HP)**

*Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en $a$. Alors le prolongement de $f$ par continuité en $a$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$.*

# III Fonctions convexes d'une variable réelle

## 1 Définitions

**Définition 12 : Fonction convexe, concave**

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur $I$ lorsque

$$\forall\, x, y \in I,\quad \forall\, t \in [0,1],\quad f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

- $f$ est dite **concave** sur $I$ lorsque $-f$ est convexe.

**Remarque**

**R 39** – On pourrait se contenter de $t \in ]0,1[$.

**R 40** – Concave n'est pas le contraire de convexe !
On peut être les deux à la fois (quand ?) et on n'est en général ni l'un ni l'autre.

La définition donne immédiatement l'interprétation géométrique suivante :

**Propriété 17 : Caractérisation par interprétation géométrique**

*$f$ est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.*

**Remarque**

**R 41** – Un point en lequel il y a un changement de concavité est appelé **point d'inflexion**.

**Définition 13 : Épigraphe**

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de $f$ s'appelle son **épigraphe**.

$$(x, y) \in \mathscr{E}(f) \iff y \geqslant f(x)$$

Voir exercice du TD : 26, 27, 28

## 2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins !

**Propriété 18 : Caractérisation avec l'épigraphe**

*$f$ est convexe sur $I$ si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

**Voir exercice du TD : 23, 24**

**Propriété 19 : Caractérisations avec les pentes des cordes**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f$ est convexe sur $I$.*

(ii) ***Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

(iii) ***Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,*

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right. \quad \text{est croissante}$$

**Démonstration**

$(i) \Rightarrow (ii)$ $y = (1-t)x + tz\ldots$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Séparer trois cas suivant la position par rapport à $a$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $\tau_x$. ■

**Exercice 4**

**Montrer qu'une fonction convexe sur $I$ admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que $f$ est continue sur $\mathring{I}$.**

**Est-ce le cas sur $I$ ?**

**Voir exercice du TD : 35, 36, 37**

## 3 Cas des fonctions dérivables

**Propriété 20 : Caractérisation avec la dérivée**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$.*

*$f$ est convexe si et seulement si $f'$ est croissante sur $I$*

**Démonstration**

Si $f$ est convexe, dans l'inégalité des trois cordes, faire tendre $z$ vers $x$ à gauche puis vers $y$ à droite.

Si $f'$ est croissante, dériver $\varphi : z \mapsto f((1-t)z + ty) - (1-t)f(z) - tf(y))$ sur $[x, y]$. ■

**Corollaire 5 : Caractérisation avec la dérivée seconde**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $I$.*

*$f$ est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur $I$.*

**Propriété 21 : Caractérisation avec les tangentes**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$.*

*$f$ est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.*

**Démonstration**

- Si la courbe de $f$ est au dessus de ses tangentes, posons $x < y$. Soit $t \in ]0,1[$, $z = (1-t)x + ty$ et donc $t = \dfrac{z-x}{y-x}$, le fait que la courbe de $f$ est au dessus de la tangente en $z$, d'équation $Y = f'(z)(X-z) + f(z)$ se traduit par $f(x) \geqslant f'(z)(x-z) + f(z)$ et $f(y) \geqslant f'(z)(y-z) + f(z)$ ce qui donne
$$(y-z)\big(f(z) - f(x)\big) \leqslant (z-x)(y-z)f'(z) \leqslant (z-x)\big(f(y) - f(z)\big)$$
(avec $z - x < 0$ et $y - z > 0$) et donc $(y-x)f(z) \leqslant (y-z)f(x) + (z-x)f(y)$ et enfin $f(z) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$.
- Si $f$ est convexe et dérivable, pour $a \in I$, on veut montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour cela, on pose $\varphi_a : x \in I \mapsto f(x) - f'(a)(x-a)$, dérivable sur $I$, de dérivée $\varphi'_a : x \mapsto f'(x) - f'(a)$. Par croissance de $f'$, $\varphi_a$ est décroissante avant $a$ et croissante après, donc admet un minimum en $a$, avec $\varphi_a(a) = f(a)$, ce qui permet bien de trouver l'inégalité voulue. ■

## 4 Inégalités de convexité

**Propriété 22 : Inégalité de Jensen**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

- *Si $f$ est convexe, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*
- *Si $f$ est concave, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*

**Démonstration**

Cas $f$ convexe. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n$ : « pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ ».

**Initialisation** : rien à faire pour $n = 1$. Pour $n = 2$, c'est la définition d'une fonction convexe.

**Hérédité** : Soit un $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $P_n$ est vraie et soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors tous les autres $\lambda_i$ sont nuls et il n'y a rien à faire.

Sinon, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0$, on pose $x = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Alors
$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$
Alors, par définition de la convexité, puis par HR, comme les $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ sont positifs de somme 1,
$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$
ce qui établit la récurrence.

**Remarque**

**R 42 –** Se rencontre souvent avec des poids tous égaux à $\dfrac{1}{n}$, ce qui donne $f\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

**R 43 –** En particulier, si $X$ est une variable aléatoire réelle finie et $\phi$ une fonction réelle d'une variable réelle convexe,

$$\phi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\phi(X)).$$

**Exemple : Très classiques**

**E 9 –** **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1\cdots\cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. Qu'obtient-on en remplaçant $x_i$ par $\dfrac{1}{x_i}$ ?

**E 10 –** $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x.$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x.$

**E 11 –** $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$

**Voir exercice du TD : 29, 30, 31, 32, 34**

# IV Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

## 1 Définition et propriétés

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\left\{\int_{[a,b]}\varphi\ ;\ \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_{[a,b]}\psi\ ;\ \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

**Définition 14 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux**

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \varphi\leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \psi\geqslant f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{Im}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

La première définition a un intérêt uniquement théorique.

**Notation 1**

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$ et $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Propriété 23 : de l'intégrale sur un segment d'une fonction CPM**

*Si $I$ intervalle, $a,b \in I$ (non nécessairement ordonnés).*

(i) $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}\right.$ *est linéaire.*

(ii) *Si* $a \leqslant b$, $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

*Si* $b \leqslant a$, $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.

(iii) ⚠ *En général, si $a,b \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$,*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) *Si* $a,b,c \in I$ *et* $f \in \mathscr{C}_m(I)$, $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

**Propriété 24 : Positivité améliorée (appellation non officielle)**

*Si $f$ est* ***continue*** *sur* $[\underset{\smile}{a,b}]$ *et* ***de signe constant****,*

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

*C'est faux si $f$ est seulement continue par morceaux.*

**Voir exercice du TD : 40 à 45**

**Propriété 25 : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

*Si $f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

*avec égalité si et seulement si $(f,g)$ est liée.*

**Exercice 5 : CCINP 76, 79**

## 2 Sommes de Riemann

**Définition 15 : Sommes de Riemann**

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à $f$, $\sigma$ et** $(\xi_k)_k$ :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(\xi_k)$$

**Théorème 13 : Convergence des sommes de Riemann**

*Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.*

(i) *$h(\sigma)$ désignant le pas de $\sigma$,*

$$S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f.$$

(ii) *Si, de plus, $f$ est $K$-lipschitzienne,*

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

**Démonstration**

- On fait une première démonstration dans le cas où $f$ est continue sur $[a,b]$. Elle y est donc uniformément continue en vertu du théorème de Heine.
  Soit $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
  Soit $S(f,\sigma,\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(\xi_k)$ une somme de Riemann sur une subdivision $\sigma$ de pas $h \leqslant \eta$.
  $$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left((a_{k+1}-a_k)f(\xi_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left(f(\xi_k)-f(x)\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|f(\xi_k)-f(x)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$
  par inégalité triangulaire. Pour $x,\xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$, $|\xi_k - x| \leqslant |a_{k+1}-a_k| \leqslant h \leqslant \eta$ donc $|f(\xi_k)-f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Ainsi,
  $$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$
  On a démontré que
  $$\forall\,\varepsilon>0,\ \ \exists\eta>0,\ \ \forall\,\sigma,\xi,\ \ h(\sigma)\leqslant\eta \Longrightarrow \left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant \varepsilon.$$
- Si $f$ est $K$-lipschitzienne (c'est le cas si $f$ est $\mathscr{C}^1$ par exemple), le calcul est plus simple :
  $$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|f(\xi_k)-f(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant K\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|\xi_k - x|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant Kh(\sigma)\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = Kh(\sigma)(b-a)\end{aligned}$$
  ce qui permet aussi de retrouver le résultat précédent.
- Voici finalement une démonstration dans le cas général où $f$ est seulement continue par morceaux. L'idée est de montrer le résultat d'abord pour une fonction indicatrice de segment, puis, par linéarité, de l'étendre aux fonctions en escalier, puis, par approximation uniforme, aux fonctions continues par morceaux.
  Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $[a,b]$ et $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$.
  Si $[c,d]$ ne contient aucun des $\xi_i$, $\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| = d-c \leqslant 2h(\sigma)$ (deux $\xi_i$ successifs sont distant d'au plus $2h(\sigma)$).
  Sinon, traitons le cas où $a<c\leqslant d<b$. On peut adapter le raisonnements pour les cas où $a=c$ ou $b=d$.
  On a des entiers $i$ et $j$ éventuellement confondus tels que
  $$a_{i-1} \leqslant \xi_{i-1} < c \leqslant \xi_i \leqslant \xi_j \leqslant d < \xi_{j+1} \leqslant a_{j+2}.$$
  Alors $S(f,\sigma,\xi) = a_{j+1} - a_i \leqslant a_{j+2} - a_{i-1}$ et
  $$a_{j+2}-a_{i-1} = \left(a_{j+2}-\xi_{j+1}\right)+\left(\xi_{j+1}-d\right)+(d-c)+(c-\xi_{i-1})+(\xi_{i-1}-a_{i-1}) \leqslant h(\sigma)+2h(\sigma)+\int_a^b f+2h(\sigma)+h(\sigma) = \int_a^b f+6h(\sigma)$$
  Donc $S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \leqslant 6h(\sigma)$ d'une part, et
  $$S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f = (a_{j+1}-a_i)-(d-c) \geqslant (a_{j+1}-a_i)-(a_{j+2}-a_{i-1}) = -(a_i-a_{i-1})-(a_{j+2}-a_{j+1}) \geqslant -2h(\sigma)$$

Donc $\left|S(f,\sigma,\xi)-\int_a^b f\right|\leqslant 6h(\sigma)$, majoration encore valable dans le premier cas.

On en déduit bien que pour $f=\mathbb{1}_{[c,d]}$, $S(f,\sigma,\xi)\xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{}\int_a^b f$.

Ensuite, par combinaison linéaire, le résultat se transmet aux fonctions en escalier.

Enfin, si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\varepsilon>0$, par approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier, on a fonction $\varphi$ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, et on a $\eta>0$ tel que si $h(\sigma)\leqslant\eta$, $\left|S(\varphi,\sigma,\xi)-\int_a^b\varphi\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors , si $h(\sigma)\leqslant\eta$,

$$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi)-\int_a^b f\right|&=\left|S(f,\sigma,\xi)-S(\varphi,\sigma,\xi)+S(\varphi,\sigma,\xi)-\int_a^b\varphi+\int_a^b\varphi-\int_a^b f\right|\\&\leqslant\left|S(f-\varphi,\sigma,\xi)\right|+\left|S(\varphi,\sigma,\xi)-\int_a^b\varphi\right|+\left|\int_a^b(\varphi-f)\right|\\&\leqslant 2(b-a)\varepsilon_0+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad\blacksquare\end{aligned}$$

**Corollaire 6 : Cas simples**

*Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a<b$,*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f.$$

*En particulier, si $a=0$ et $b=1$, $f\in\mathscr{C}_m([0,1])$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f.$$

**Remarque**

**R 44** – À cause du $\frac{1}{n}$, ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0\text{ ou }1\text{ ou }25}^{n-1\text{ ou }n-2\text{ ou }n+12}f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f.$$

**Exercice 6**

**Limite de $\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j}$. Retrouver la nature de la série harmonique.**

**Exercice 7**

**Calculer $I(x)=\int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)\mathrm{d}t$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.**

**Voir exercice du TD : 48 à 50**

## 3 Intégrale et primitive

**Propriété 26 : Constante de primitivation**

*Soit* $f\ :\ I \to \mathbb{K}$, $F, G$ *deux primitives de* $f$ *sur* $I$, *avec* $I$ ***intervalle***.
*Alors on a* $C \in \mathbb{K}$ *tel que* $\forall x \in I,\quad F(x) = G(x) + C$.

**Théorème 14 : fondamental de l'Analyse**

*Si* $f$ *est continue sur un intervalle* $I$ *et* $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ *est l'unique primitive de* $f$ *qui s'annule en* $a$.

**Corollaire 7 : du théorème fondamental**

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $F$ *primitive de* $f$ *sur* $I$, $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) *Si* $f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

(iv) ***Inégalité des accroissements finis*** : *Si* $f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *et* $f'$ *bornée par* $k$, *alors* $f$ *est* $k$*-lipschitzienne sur* $[a,b]$.

**Propriété 27 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes**

*Soient* $I, J$ *intervalles de* $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ *dérivables*, $f : J \to \mathbb{K}$ *continue.*

*L'application* $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ *est dérivable sur* $I$ *et*

$$\forall x \in I,\quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

**Exercice 8 : Ex CCINP 56**

On considère la fonction $H$ définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que $H$ est $C^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $u$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction $u$ de la question 2., calculer la limite en $1^+$ de la fonction $H$.

Voir exercice du TD : 46, 47

**Propriété 28 : Intégration par parties**

*Si $u, v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$,*

$$\forall\, a, b \in I,\quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 9**

**Équivalent de** $f(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t$ **en** $+\infty$.

---

$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x - \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ et si $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e} = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x \ln x)$.

**Propriété 29 : Changement de variable**

*Si $I$ intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f$ continue sur $I$,*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

# 4 Calcul de primitives et d'intégrales

## Méthode 1 : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

### a Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

### b L'intégration par parties

**Fonction dont la dérivée est plus simple...** ...comme par exemple les fonctions $\ln, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arctan}$, etc.

**Exercice 10**

**Calculer** $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

**Abaissement du degré, formule de récurrence**

**Exercice 11**

**Calculer** $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

### c Le changement de variable

**On veut calculer** $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ : C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

**On veut calculer** $\int f(x)\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir $\varphi$ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de $t$ à $x$ ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, $\varphi$ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

### d Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.
Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a\in\mathbb{R}$, sur $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n\neq 1$$
$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur $ax^2+bx+c$ au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et $\mathrm{Arctan}$ :

- On se débarrasse du $x$ au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en $\mathrm{Arctan}$.

### e Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec $p$ ou $q$ impair, on peut poster $t=\cos x$ si $q$ est impair et $t=\sin x$ si $p$ est impaire en utilisant $\cos^2+\sin^2=1$.
Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

**Règles de Bioche**

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x\mapsto -x$, on pose $t=\cos x$ ;
- $x\mapsto \pi-x$, on pose $t=\sin x$ ;
- $x\mapsto \pi+x$, on pose $t=\tan x$ ;
- Sinon on pose $t=\tan\frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$ !!

**Exercice 12**

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 13**

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$.

### f Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch},\mathrm{sh},\mathrm{th}$ et $\exp$, on peut poser $t=\mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\,x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\,x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch},\mathrm{sh},\mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch},\mathrm{sh},\mathrm{th}$ par $\cos,\sin,\tan$ respectivement.

### g Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en $x$ et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ ($x$ et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en $x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$, il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x + \beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \operatorname{sh} u$ $(\operatorname{sh}^2+1 = \operatorname{ch}^2)$ ou $t = \tan u$ $\left(1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}\right.$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \operatorname{ch} u$ suivant le signe de $t$. $(\operatorname{ch}^2 - 1 = \operatorname{sh}^2.)$
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ $(1-\cos^2 = \sin^2$ et $1-\sin^2 = \cos^2.)$

**Exercice 14**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

**Voir exercice du TD : 38, 39**

# 5 Formules de Taylor

**Définition 16**

Si $f$ est $n$ fois dérivable en $a$, son **développement de Taylor** en $a$ à l'ordre $n$ est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de $f$ en $a$ à l'ordre $n$ est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si $f$ est polynomiale de degré $d$, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** $R_n$ : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** $R_n$ : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** $R_n$ : c'est la formule de Taylor-Young.

## a Taylor reste intégrale

**Propriété 30 : Formule de Taylor avec reste intégral**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $f$ **est de classe** $\mathscr{C}^{n+1}$ **sur** $I$, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

*ie*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Remarque**

**R 45 –** À connaître **PARFAITEMENT**.
Pour s'en rappeler : tester pour $n = 0$ et plus de $a$ sous l'intégrale.

**Démonstration**

S'obtient par intégration par parties répétées, ou, mieux, en posant $\varphi : t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(a) = f(x) - T_n(x) = R_n(x)$ et $\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ donne, après télescopage, la formule voulue.

### b Inégalité de Taylor-Lagrange

**Propriété 31 : Inégalité de Taylor-Lagrange**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $f$* ***est de classe*** $\mathscr{C}^{n+1}$ ***sur*** $I$, $a \in I$. *Pour tout $x \in I$,*

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left( f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

**Remarque**

**R 46 –** Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $n = 0$ ?

### c Formule de Taylor-Young

**Propriété 32 : Formule de Taylor-Young**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $f$* ***est de classe*** $\mathscr{C}^n$ ***sur*** $I$, $a \in I$.

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

*ie*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

**Remarque**

**R 47 –** L'hypothèse du programme officiel est $f$ de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en $a$.

**Voir exercice du TD : 51, 52, 53**