11

Intégrales à paramètres

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

Théorème 1 : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a \in \overline{J}$ éventuellement infini et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$

On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} g(t)$.*

H2 *Les $t \mapsto f(x,t)$ pour $x \in J$ et g sont continues par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les $t \mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 2 : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \left| \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$

On suppose

H1 *$\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.*

H2 *$\forall x \in X,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in X,\ \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur X.*

Théorème 3 : Extension par domination locale

On peut remplacer ***H2*** *par*

H2 Hypothèse de domination locale *: Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction ϕ_V continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x' \in V,\ \forall t \in I,\ \left|f(x',t)\right| \leqslant \phi_V(t)$$

ou bien pour tout segment S de X, il existe une fonction ϕ_S continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \phi_S(t)$$

III Classe d'une intégrale à paramètre

Théorème 4 : Classe $\mathcal{C}^1$ d'une intégrale à paramètre – théorème de Leibniz

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$

On suppose

H1 *$\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, de dérivée $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.*

H2 *$\forall x \in J,\ t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*

H3 *$\forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J*

C2 *$\forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I et* $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 5 : Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée $x \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.*

H2 *Pour tout entier $j \in [\![0, k-1]\!]$, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est **intégrable** sur I.*

H3 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J*

C2 $\forall\, j \in [\![1,k]\!],\ \forall\, x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

Corollaire 1 : Classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$
On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.*

H2 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H4 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ_k continue par morceaux, positive, intégrable sur I intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi_k(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J*

C2 $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$