11

Réduction 3 : trigonalisation et nilpotence

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais se généralise au cas d'un corps quelconque, avec la prudence pour certains résultats de devoir travailler dans un corps de caractéristique nulle ($\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.)

I Trigonalisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1 Définition

Définition 1 : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PTP^{-1}$.

Propriété 1 : Caractérisation géométrique

A est trigonalisable si et seulement si n'importe quel endomorphisme qu'elle représente l'est.

Propriété 2 : Caractérisation par χ scindé

u (respectivement A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Propriété 3 : Caractérisations 2 et 3 de la trigonalisabilité

u est trigonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Corollaire 1 : Trigonalisation automatique dans $\mathbb{C}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes et toutes les matrices sont trigonalisables.

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

Méthode 1 : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\binom{x_1}{y_1}$ vecteur propre associé à λ.
2. On complète en $\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\binom{x_2}{y_2}$ tel que $A\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1}{y_1} + \lambda\binom{x_2}{y_2}$.

Méthode 2 : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ.
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

II Endomorphismes et matrices nilpotent·e·s

1 Définition

Définition 2 : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

$u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $A^p = 0_n$).

Le plus petit $p \geqslant 1$ vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**.

2 Propriétés

Propriété 4 : Caractérisation

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}\,u = \{0\}$.

Dans ce cas, $\chi_u = X^n$ où $n = \dim E$.

Idem avec des matrices.

Propriété 5 : Majoration de l'indice de nilpotence

L'indice de nilpotence est toujours majoré par $n = \dim E$.

III Sous-espaces caractéristiques

Définition 3 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et les m_k (leurs multiplicités) sont dans $\mathbb{N}^*$.

On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous-espaces

$$F_k(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$$

pour $k \in [\![1, p]\!]$.

Propriété 6 : des sous-espaces caractéristiques

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(*i*) *Chaque $F_k(u)$ est stable par u.*

(*ii*) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k(u)$.

(*iii*) $\forall\, k \in [\![1, p]\!],\quad E_k(u) \subset F_k(u)$.

(*iv*) $\forall\, k \in [\![1, p]\!],\quad \dim F_k(u) = m_k$.

Théorème 1 : Réduction par blocs

Si χ_u est scindé, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux donc de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix} \text{ où, pour tout } k \in [\![1, p]\!],$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d_k}(\mathbb{K}).$$

Si χ_A est scindé, A est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux.

Corollaire 2 : Décomposition de Dunford (HP)

Si u est trigonalisable, on peut trouver d diagonalisable et n nilpotent tels que $u = d + n$ et $nd = dn$.