11

Réduction 3 : trigonalisation et nilpotence

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais se généralise au cas d'un corps quelconque, avec la prudence pour certains résultats de devoir travailler dans un corps de caractéristique nulle ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.)

I Trigonalisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Définition

Définition 1 : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable**
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable**

Propriété 1 : Caractérisation géométrique

Remarque

R 1 – Être diagonalisable implique être trigonalisable. La réciproque est fausse !

R 2 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u. On parle de **drapeau** stable par u.

R 3 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire inférieure. En effet, une permutation des vecteurs de la base permet de passer de l'un à l'autre.

Propriété 2 : Caractérisation par χ scindé

Propriété 3 : Caractérisations 2 et 3 de la trigonalisabilité

u est trigonalisable si et seulement si

Corollaire 1 : Trigonalisation automatique dans $\mathbb{C}$

Remarque

R4 – Si u (respectivement A) est trigonalisable, comme le polynôme caractéristique est scindé, on a automatiquement que si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de de multiplicités respectives $m_1,\dots,m_p$, alors $\sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i = \operatorname{tr} u$ (ou $\operatorname{tr} A$) et $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i} = \det u$ (ou $\det A$). Cela saute d'ailleurs au yeux avec la matrice triangulaire !

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

On peut toujours mettre en application la démonstration par récurrence constructive.

Voici deux exemples particuliers.

Méthode 1 : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\binom{x_1}{y_1}$ vecteur propre associé à λ.
2. On complète en $\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P\begin{pmatrix}\lambda & \alpha\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ en cherchant $\binom{x_2}{y_2}$ tel que $A\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1}{y_1} + \lambda\binom{x_2}{y_2}$.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix}-7 & 1\\ -9 & -1\end{pmatrix}$$

1. **A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?**
2. **Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).**

Méthode 2 : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ.
2. On cherche $\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}$.

Remarque

R5 – Il se peut aussi que A ait une valeur propre triple.

II ENDOMORPHISMES ET MATRICES NILPOTENT·E·S

1 Définition

Définition 2 : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

Remarque

R 6 – u est nilpotent si et seulement si n'importe quelle matrice qui le représente l'est.

Exemple

E 1 – L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de dérivation.

E 2 – $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

E 3 – Plus généralement, une matrice triangulaire stricte.

2 Propriétés

Propriété 4 : Caractérisation

Remarque

R 7 – En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est presque jamais diagonalisable !

Propriété 5 : Majoration de l'indice de nilpotence

III Sous-espaces caractéristiques

Définition 3 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et les m_k (leurs multiplicités) sont dans $\mathbb{N}^*$.

On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous-espaces

pour $k \in [\![1, p]\!]$.

Remarque

R 8 – À ne pas confondre avec les sous-espaces propres $E_k(u) = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \mathrm{id}_E\right)$!

Propriété 6 : des sous-espaces caractéristiques

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(i) *Chaque $F_k(u)$ est stable par u.*

(ii) $E =$

(iii) $\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad E_k(u)$

(iv) $\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad \dim F_k(u) =$

Théorème 1 : Réduction par blocs

Si χ_u est scindé, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux .

Si χ_A est scindé, A est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux.

Corollaire 2 : Décomposition de Dunford (HP)

Si u est trigonalisable, on peut trouver d diagonalisable et n nilpotent tels que

Remarque

R 9 – On peut même montrer que d et n sont uniques et sont des polynômes en u.

On parle de **décomposition de Dunford** (voir TD $*$).

R 10 – C'est très intéressant par exemple pour calculer les puissances de u.