11

Réduction 3 : trigonalisation et nilpotence

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	
Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.	Dimension d'un sous-espace caractéristique.
Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	

Table des matières

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais se généralise au cas d'un corps quelconque, avec la prudence pour certains résultats de devoir travailler dans un corps de caractéristique nulle ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.)

I Trigonalisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1 Définition

Définition 1 : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PTP^{-1}$.

Propriété 1 : Caractérisation géométrique

A est trigonalisable si et seulement si n'importe quel endomorphisme qu'elle représente l'est.

Remarque

R 1 – Être diagonalisable implique être trigonalisable. La réciproque est fausse !

R 2 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u. On parle de **drapeau** stable par u.

R 3 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire inférieure. En effet, une permutation des vecteurs de la base permet de passer de l'un à l'autre.

Propriété 2 : Caractérisation par χ scindé

u (respectivement A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration

($\Longrightarrow$) (Matriciellement) Si A est trigonalisable, on a P inversible et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $A = PTP^{-1}$.

Alors $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_i)$ est scindé.

($\Longleftarrow$) (Géométriquement) **Méthode classique**

- Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
- Si $n \geqslant 2$ et χ_u est scindé, il y a au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B} = (x, e_2, \dots, e_n)$ de E.

  Dans cette base, la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

  Si $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_1 = (e_2, \dots, e_n)$ de E_1 est A_1, alors, par un déterminant triangulaire par bloc, $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A_1}$.

  Donc χ_{A_1} est scindé. Il suffit donc de raisonner par récurrence : si on sait trigonaliser u_1 en dimension $n - 1 \geqslant 1$ pour n fixé, on a $P_1 \in \mathscr{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ et T_1 triangulaire telle que $A_1 = P_1 T_1 P_1^{-1}$.

  Alors $A = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & P_1 T_1 P_1^{-1} \end{pmatrix}$.

  On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix} = I_n$ donc P inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix}$

  et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & T_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. ■

Propriété 3 : Caractérisations 2 et 3 de la trigonalisabilité

u est trigonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Démonstration

En effet, si u est trigonalisable, χ_u est scindé et c'est un polynôme annulateur d'après Cayley-Hamilton.

Si, réciproquement, P est un polynôme annulateur scindé, A matrice de u dans une base $\mathscr{B}$, π_A divise P donc a au moins une racine donc $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, u \neq \varnothing$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, x vecteur propre associé que l'on complète en une base de E, ce qui permet de voir que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$.

Alors $P(A') = \begin{pmatrix} P(\lambda) & (*) \\ (0) & P(A_1) \end{pmatrix} = 0_n$ donc P annule A_1 et on termine par récurrence sur n comme dans la caractérisation avec le polynôme caractéristique scindé. ■

Corollaire 1 : Trigonalisation automatique dans $\mathbb{C}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes et toutes les matrices sont trigonalisables.

Remarque

R4 – Si u (respectivement A) est trigonalisable, comme le polynôme caractéristique est scindé, on a automatiquement que si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$, alors $\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i = \operatorname{tr} u$ (ou $\operatorname{tr} A$) et $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i} = \det u$ (ou $\det A$). Cela saute d'ailleurs au yeux avec la matrice triangulaire !

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

On peut toujours mettre en application la démonstration par récurrence constructive.
Voici deux exemples particuliers.

Méthode 1 : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\binom{x_1}{y_1}$ vecteur propre associé à λ.
2. On complète en $\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\binom{x_2}{y_2}$ tel que $A\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1}{y_1} + \lambda \binom{x_2}{y_2}$.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

1. **A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?**
2. **Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).**

Méthode 2 : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ.
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Remarque

R5 – Il se peut aussi que A ait une valeur propre triple.

II ENDOMORPHISMES ET MATRICES NILPOTENT·E·S

1 Définition

Définition 2 : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

$u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $A^p = 0_n$).

Le plus petit $p \geqslant 1$ vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**.

Remarque

R 6 – u est nilpotent si et seulement si n'importe quelle matrice qui le représente l'est.

Exemple

E 1 – L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de dérivationest nilpotent d'indice $n+1$.

E 2 – $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice n.

E 3 – Plus généralement, une matrice triangulaire stricteest nilpotente d'indice au plus n.

2 Propriétés

Propriété 4 : Caractérisation

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $\operatorname{Sp} u = \{0\}$.
Dans ce cas, $\chi_u = X^n$ où $n = \dim E$.
Idem avec des matrices.

Démonstration

Si u est nilpotent, sa seule valeur propre complexe est 0 (si λ est valeur propre, on a $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ et alors $u^p(x) = \lambda^p x = 0$ donc $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$) donc son polynôme caractéristique est X^n qui est scindé.

Si u est trigonalisable et n'a que 0 comme valeur propre, il est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte A, donc il est nilpotent d'indice au plus n (car $A^n = 0_n$). ∎

Remarque

R 7 – En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est presque jamais diagonalisable !

Propriété 5 : Majoration de l'indice de nilpotence

L'indice de nilpotence est toujours majoré par $n = \dim E$.

Démonstration

On a vu une justification dans la preuve précédente.

Autre preuve possible : le polynôme caractéristique est X^n et c'est un polynôme annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Autre preuve possible : si p l'indice de nilpotence et $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$, alors on montre que $\left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est libre, donc $p \leqslant n$. ∎

III Sous-espaces caractéristiques

Définition 3 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et les m_k (leurs multiplicités) sont dans $\mathbb{N}^*$.

On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous-espaces

$$F_k(u) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{m_k}\right)$$

pour $k \in [\![1, p]\!]$.

Remarque

R 8 – À ne pas confondre avec les sous-espaces propres $E_k(u) = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda_k \operatorname{id}_E\right)$!

Propriété 6 : des sous-espaces caractéristiques

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(i) *Chaque* $F_k(u)$ *est stable par* u.

(ii) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k(u)$.

(iii) $\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad E_k(u) \subset F_k(u)$.

(iv) $\forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad \dim F_k(u) = m_k$.

Démonstration

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(i) Vient du fait que u et le polynôme en u : $\left(u - \lambda_k \operatorname{id}_E\right)^{m_k}$ commutent.

(ii) Découle du lemme de décomposition des noyaux et du théorème de Cayley-Hamilton.

(iii) Pour tout endomorphisme v et tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} v^n$.

(iv) Pour alléger la rédaction, on note F_k pour $F_k(u)$. Soit $d_k = \dim F_k$, u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k.

La matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ est diagonale par blocs avec, sur chaque bloc diagonale, une matrice représentant u_k.

Or, par définition de F_k, $\left(u_k - \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}\right)^{m_k} = 0_{F_k}$. L'endomorphisme $n_k = u_k - \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}$ de F_k est donc nilpotent et $u_k = \lambda_k \operatorname{id}_{F_k} + n_k$.

On peut donc choisir une base de F_k dans laquelle n_k est représenté par une matricielle triangulaire supérieure stricte.

Alors la matrice de u dans la base adaptée est diagonale par blocs avec, sur chaque bloc diagonal, une matrice de la forme $T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d_k}(\mathbb{K})$, ce qui donne $\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$.

Un autre argument pour trouver ce polynôme caractéristique est le suivant : $E_k \subset F_k$ et le lemme de décomposition des noyaux donne, si $k \neq \ell$, $F_k \cap F_\ell = \{0\}$. On en déduit que λ_k est la seule valeur propre possible de l'endomorphisme u_k.

Mais χ_{u_k} divise χ_u qui est scindé, donc χ_{u_k} est scindé également, unitaire, de degré d_k. Donc $\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$.
On obtient alors

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{d_k} = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

et donc pour k, $d_k = m_k$ (unicité de la multiplicité). ■

Théorème 1 : Réduction par blocs

Si χ_u est scindé, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux donc de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix} \text{ où, pour tout } k \in [\![1, p]\!], \quad A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d_k}(\mathbb{K}).$$

Si χ_A est scindé, A est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux.

Démonstration

Démontré dans la propriété précédente. ■

Corollaire 2 : Décomposition de Dunford (HP)

Si u est trigonalisable, on peut trouver d diagonalisable et n nilpotent tels que $u = d + n$ et $nd = dn$.

Démonstration

Il suffit de choisir n et d tels que, avec les notations précédentes, les F_k soient stables par n et par d, pour tout k, $n_k = u_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ et $d_k = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$.

Alors d diagonalisable (dans une base adaptée à la supplémentarité des F_k, sa matrice est diagonale), et n nilpotent, car $n^{\max m_k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. ■

Remarque

R 9 – On peut même montrer que d et n sont uniques et sont des polynômes en u.
On parle de **décomposition de Dunford** (voir TD $*$).

R 10 – C'est très intéressant par exemple pour calculer les puissances de u.