10 Limites d'intégrales

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires

Convergence dominée

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

La démonstration est hors programme.

Intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme.

En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables.
On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Table des matières

10 Limites d'intégrales 1

I Interversion limites et intégrales 2
1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment . . . 2
2 Théorème de convergence dominée . . . 3
3 Un découpage d'intégrale . . . 4
4 Extension du théorème . . . 5

II Intégration terme à terme : Interversion série-intégrale 6
1 Rappel : convergence uniforme sur un segment . . . 6
2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives . . . 6
3 Cas général . . . 7
4 Mise en pratique . . . 8

I Interversion limites et intégrales

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarque

R 1 – Un joli théorème mais qui demande

- d'être sur un segment,
- des fonctions continues dans le programme (mais continues par morceaux suffirait... sauf que le continuité par morceaux, contrairement à la continuité, ne se transmet pas par convergence uniforme),
- de la convergence uniforme !

Donc, dans la pratique, il ne s'applique pas si souvent...

2 Théorème de convergence dominée

Le but est d'intervertir limite et intégrale sur un intervalle quelconque. Le programme officiel stipule que « pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t. »

Théorème 2 : de convergence dominée (version discrète)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.*

H2 *Toutes les f_n pour $n\in\mathbb{N}$ et f sont continues par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ (c'est-à-dire continue par morceaux, positive et intégrable sur I) telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in I,\quad |f_n(t)|\leqslant\phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_n et f sont intégrables sur I et* $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

Hors-programme. ■

Remarque

R2 – Le théorème demande donc que les f_n et f soient continues par morceaux sur I, sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on peut se permettre de ne pas vérifier/justifier.

R3 – **« à valeurs réelles ou complexes »** est une hypothèse rendue nécessaire par le fait que lorsqu'on parle d'intégrales ailleurs que sur un segment, on se limite aux fonctions à valeurs complexes.

R4 – **« continue par morceaux »** : déjà, la convergence uniforme ne transmet pas la continuité par morceaux (elle transmet la continuité), et ici on n'impose que la convergence simple, ce qui ne transmet vraiment rien du tout (en fait si : la monotonie, la parité, etc.)

R5 – La fonction ϕ est nécessairement à valeurs réelles positives.

R6 – Sur un segment, lorsqu'il y a continuité et convergence uniforme, pas besoin de domination. Mais dans ce cas, il suffit de dominer par une fonction constante.

R7 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_n.

Exercice 1 : Wallis

Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t$ converge, donner sa limite.

Définissons

$$f_n:\left|\begin{array}{ccc}]0,\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \sin^n t\end{array}\right.$$

La suite (f_n) converge simplement vers $\widetilde{0}$. L'hypothèse de domination est facile à réaliser :

$$\forall n\geqslant 0\quad\forall t\in]0,\pi/2[\qquad|\sin^n t|\leqslant 1$$

Or la fonction $t\longmapsto 1$ est indépendante de n, et intégrable sur $]0,\pi/2[$.
Les fonctions f_n et la fonction $\widetilde{0}$ sont continues par morceaux, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{\pi/2}f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^{\pi/2}0=0$$

Remarque

R 8 – On rencontre beaucoup de suites monotones de fonctions (à ne pas confondre avec une suite de fonctions monotones : une suite croissante de fonctions, c'est une suite (f_n) telle que, pour tout n, $f_n \leqslant f_{n+1}$, autrement dit pour tout n et pour tout x, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$).

Si on ne sait pas par quoi dominer la famille f_n, on pourra donc essayer de dominer soit par la valeur absolue de la limite simple de la suite (f_n), soit par $|f_0|$ (ou $|f_1|$...).

Exercice 2 : Utilité de l'hypothèse de domination

Définissons, sur $[0,1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$, et prenant en $\frac{1}{n+2}$ la valeur $n+1$.

Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 : CCINP 25

Exercice 4 : CCINP 26

Exercice 5 : CCINP 27

3 Un découpage d'intégrale

Exercice 6

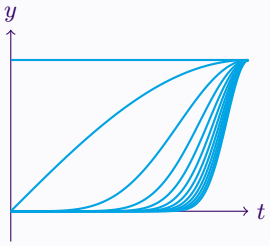
On peut démontrer la convergence vers 0 de la suite des intégrales de Wallis sans utiliser le théorème de convergence dominée. On considère $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

On remarque d'abord que l'on est sur un segment, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(\sin^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Traçons des graphes de ces fonctions.

On voit qu'elles concentrent leur intégrale au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, ce qui motive le découpage suivant : soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$



En déduire le résultat.

On a, pour tout n,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \\ &\leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Mais $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leqslant 1$, donc il existe un rang N à partir duquel $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $n \geqslant N \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

4 Extension du théorème

En utilisant le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite, on peut déterminer des limites d'intégrale avec un paramètre qui n'est pas nécessairement un entier.

On peut donner l'énoncé suivant : dans la pratique, on peut repasser à la main par les suites par caractérisation séquentielle, mais l'énoncé est très proche du précédent !

Théorème 3 : de Convergence Dominée (version continue)

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \overline{J}$ éventuellement infini.
Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions et f une fonction, définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.
On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} f(t)$.*

H2 *Les f_λ pour $\lambda \in J$ et f sont continues par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I, \quad |f_\lambda(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_λ et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Remarque

R 9 – De nouveau, le théorème demande aussi que les f_λ et f soient continues par morceaux sur I, sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 10 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_λ, et en faisant tendre λ vers λ_0 dans la domination, on obtient celle de f.

Exercice 7 : Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ a une limite quand $x \to +\infty$; la calculer.

Domination par $\dfrac{1}{1+t^2}$, limite nulle.

Exercice 8 : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Changement de variable $u = xt$. $xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)$ et $xF(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 9 : Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente

Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge. On définit, si $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
Calculer la limite de F en $+\infty$. Puis montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g : x \to \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Remarque

R 11 – Lorsque l'on saura dériver ce type de fonctions, cela nous permettra de retrouver la valeur de I : cela revient sous quelques hypothèses à dériver sous le signe intégral, ce qui permet de montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

Pour la limite en $+\infty$: TCVD avec domination sur $[1, +\infty[$ par exemple par $\phi(t) = \mathrm{e}^{-t}\left|\frac{\sin t}{t}\right|$.
Sinon IPP : on se ramène à l'exercice précédent.

II Intégration terme à terme : Interversion série-intégrale

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème 4 : Intégration terme à terme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

Théorème 5 : Intégration terme à terme de fonctions à valeurs réelles positives

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies sur I. On suppose

H1 $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, t \in I,\ \ f_n(t) \geqslant 0.$

H2 *La série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I

H3 *Les* f_n *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *sont continues par morceaux sur* I.

Alors

C1 *Dans* $[0,+\infty]$, $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarque

R 12 – De nouveau, le théorème demande aussi que les f_n et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soient continues par morceaux sur I, sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 13 – En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n < +\infty$.

Démonstration

Hors programme. ■

3 Cas général

Théorème 6 : Intégration terme à terme, convergence N_1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *et sa somme* $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue par morceaux sur* I.

H2 *Chaque* f_n *est intégrable sur* I *(et donc en particulier continue par morceaux sur* I.*)*

H3 *La série* $\sum N_1(f_n) = \sum \int_I |f_n|$ *converge.*

Alors

C1 $\sum \int_I f_n$ *converge.*

C2 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable sur* I.

C3 $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

Hors programme. ■

Remarque

R 14 – De nouveau, le théorème demande aussi que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit continue par morceaux sur I, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 15 – On note en général $N_1(f_n) = \int_I |f_n|$. L'hypothèse cruciale **H3** s'écrit alors : $\sum N_1(f_n)$ converge.

R 16 – Y voir un parallèle avec le théorème de Fubini : la sommabilité est une convergence absolue de la somme double, à la différence qu'ici une somme est discrète, l'autre est continue.

4 Mise en pratique



Méthode 1 : Intégration terme à terme / Interversion séries-intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Dans le cas réel positif, l'interversion peut être faite a priori, et on vérifie ensuite si les quantités manipulées sont finie ou $+\infty$.
2. Sinon, on peut appliquer le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
3. Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément. Le plus agréable serait qu'elle converge normalement[a], donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.
4. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique.
   - On peut envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_a^b S_n(t)\mathrm{d}t$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $|S_n(t)|$.
   - On peut aussi poser $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et écrire, pour tout $n \geqslant 0$, $S = \sum_{k=0}^{n} f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur le séries alternées...)

a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.

Exercice 10

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 11

On suppose que (a_n) **est une suite de nombres complexes telle que** $\sum |a_n|$ **converge. On définit, sur** $\mathbb{R}$, $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\mathrm{d}t = a_m$.

Exercice 12

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 13 : ex CCINP 19

1. **Prouver que, pour tout entier naturel** n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ **est intégrable sur** $]0,1]$ **et calculer** $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \mathrm{d}t$.
2. **Prouver que** $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ **est intégrable sur** $]0,1]$ **et que** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t \mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

---

1. On pose, pour tout entier naturel n, $f_n : t \in]0,1] \mapsto t^n \ln t$, continue sur $]0,1]$.
   On a $t^{\frac{1}{2}}|f_n(t)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de 0, $|f_n(t)| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.
   Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$(fonction de Riemann intégrable). Donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.
   De plus, pour $x \in]0,1]$, par intégration par parties

$$\int_x^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^n}{n+1}dt = -\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

   On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $\boxed{I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}.}$

2. $\forall\, t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ donc, pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n!}$.
   On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}, g_n : t \in]0,1] \mapsto \frac{t^n \ln t}{n!}$. Sous réserve de pouvoir intervertir, on obtiendra

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n!}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(n+1)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$

   C'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t \mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nn!}.}$ Justifions l'intégration terme à terme :

   H1 $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et a pour somme f qui est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   H2 $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 1.
   H3 $N_1(g) = \displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^n \ln t}{n!}\mathrm{d}t = \frac{-I_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$. On a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant N_1(g_n) \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   De plus, $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)^2 n!}$ converge.
   Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions s'applique et il donne en particulier $\boxed{\text{l'intégrabilité de } f.}$

Exercice 14 : CCINP 49