

Groupe symétrique et déterminant [MP2I]

1

GROUPE SYMÉTRIQUE

1 Définition, structure

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E . On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

$$\text{Si } \sigma \in \mathfrak{S}_n, \text{ on note } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Remarque

R1 – Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal n mais ...

R2 – Comme $\mathfrak{S}_n$ est fini, toute permutation est d'ordre fini, divisant $n!$ (théorème de Lagrange).

Propriété 1 : Structure

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geq 3$.

Définition 2 : Orbites

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La relation binaire définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **orbites** de σ .

Si $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Propriété 2 : Description d'une orbite

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{\ell-1}(x)\}$ (deux à deux distincts).

Remarque

R3 – $\ell \leq \text{ordre}(\sigma)$.

Définition 3 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui **ne sont pas** invariants par σ .

Remarque

R4 – C'est la réunion de toutes les orbites non réduites à un élément.

Propriété 3 : Commutation de permutations à supports disjoints

- (i) Le support d'une permutation est stable par cette permutation.
- (ii) Deux permutations à supports disjoints commutent.

Exercice 1 : Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et (i, j) commutent, $\{i, j\}$ est stable par σ . La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n) = \{\text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}\}$. Étudier le cas où $n = 2$.



2 Cycles

Définition 4 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i, j\}$.
On la note $\tau = (i \ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
 $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i, j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$.
On appelle **p -cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1, i_2, \dots, i_p$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2 ; c(i_2) = i_3 ; \dots ; c(i_{p-1}) = i_p ; c(i_p) = i_1$$

p est la **longueur** du cycle c . On note $c = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p)$.

Exercice 2 : Conjugaison de cycle (souvent utile)

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Propriété 4 : Ordre d'un cycle

Un p -cycle est d'ordre p .

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque

R5 – Donc les cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Remarque

R6 – Par commutativité des cycles à supports disjoints, on a facilement que si m est le ppcm des ordres des cycles, $\sigma^m = \text{id}$. Voir TD : montrer que le ppcm est égal à l'ordre de σ .



Voir exercice du TD : 5

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Remarque

R7 – Donc les transpositions de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration

Se déduit du théorème précédent en sachant décomposer un cycle produit de transposition.

Voici deux propositions adaptables à tout cycle :

$$(1 \ 2 \ \dots \ p) = (1 \ p)(1 \ p-1) \dots (1 \ 2) = (1 \ 2)(2 \ 3) \dots (p-1 \ p)$$

Mais savoir le démontrer directement n'est pas inintéressant (technique utile dans d'autres contextes.) Par récurrence sur $n \geq 2$.

- **Initialisation** : pour $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{\text{id}, (1 \ 2)\}$ avec $\text{id} = (1 \ 2)^2$.
- **Hérédité** : Supposons que, pour un $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_n$ est engendré par ses transpositions (HR). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$; on veut écrire σ comme un produit de transpositions. On va discuter suivant $\sigma(n+1)$:

★ **1^{er} Cas** : Si $\sigma(n+1) = (n+1)$, alors $\llbracket 1, n \rrbracket$ est stable par σ , et celle-ci induit une permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sigma' : \begin{cases} \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ k & \longmapsto \sigma(k) \end{cases}.$$

Par (HR), on peut trouver des transpositions $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_p \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma' = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_p$.

On peut alors prolonger les τ'_i en des permutations τ_i de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ en posant $\tau_i(n+1) = n+1$.

On obtient la décomposition en remarquant que σ et $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p$ coïncident sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par définition des τ'_i et en $n+1$ qui est laissé invariant par toutes ces permutations. Donc

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p.$$

★ **2^e Cas** : Si $\sigma(n+1) \neq (n+1)$,

■ **La récurrence est établie.** Remarquons qu'à chaque étape, on ajoute au plus une transposition.

3 Signature

Définition 5 : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ .

On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1, 1\}$.

On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Remarque

■ **R 8** – La définition avec les inversions peut être oubliée tout de suite. Ce n'est pas ce qui importe dans la signature : il vaut mieux savoir se ramener à des cycles ou à des transpositions (voir ci-après).

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n \geq 2$. L'application

$$\varepsilon : \begin{cases} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1, 1\}, \times) = (\mathbb{U}_2, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{cases}$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 5 : de la signature

- (i) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.
- (ii) Si c est un p -cycle, $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.
- (iii) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.



Voir exercice du TD : 4, 6

Exercice 3

Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si p est le nombre d'orbites de σ , alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$.

4 Groupe alterné (HP)

Définition 6 : Groupe alterné

Le sous-groupe $\mathfrak{A}_n = \text{Ker}(\varepsilon)$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ est appelé **groupe alterné d'ordre n (ou de degré n)**.

Propriété 6

Pour tout $n \geq 2$, $|\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$.

**Remarque**

R 9 – Il y a donc autant de permutations paires que de permutations impaires dans $\mathfrak{S}_n$.

Exemple

E 1 – Décrivons $\mathfrak{S}_4$: il contient

et $\mathfrak{A}_4$: il contient

Soit $G = \{\text{id}, \sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4), \sigma_2 = (1\ 3)(2\ 4), \sigma_3 = (1\ 4)(2\ 3)\}$.

Il s'agit d'un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{A}_4$ comme l'atteste sa table ci-contre, appelé groupe de Klein¹.

On peut montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbb{U}_2^2, \times)$ et que tout groupe d'ordre 4 est soit isomorphe au groupe de Klein, soit isomorphe à $(\mathbb{U}_4, \times)$ (en examinant les différentes tables possibles pour la loi de groupe.)

	id	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	id	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	id	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	id

Remarque

R 10 – On peut facilement trouver des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ d'ordre 1, 2, 3, 4, et 12 mais il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6. On peut démontrer que ceux-ci sont soit cycliques (mais $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6), soit isomorphes au groupe diédral D_6 des isométries laissant invariant un triangle équilatéral (contenant 3 rotations et 3 symétries, engendré par une des rotations et une des symétries).

Par contre, on en trouve dans $\mathfrak{S}_4$ engendrés par un 3-cycle et une transposition facilement isomorphe à D_6 (qui est aussi isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, par ailleurs!).



Voir exercice du TD : 8

**FORMES n -LINÉAIRES****Définition 7 : Application n -linéaire**

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \rightarrow F$ est dite **n -linéaire** lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f_i : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x + \lambda y, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ + \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n -linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n -linéaire**.

Propriété 7 : Espace vectoriel de applications n -linéaires

$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 8 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i \neq j$,

■ f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i \neq j,$

■ f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i \neq j,$

Propriété 8 : Caractérisations

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

(iii) f est alternée si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

Propriété 9 : Équivalence entre alternée et antisymétrique

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarque

R 11 – Le sens réciproque n'est en réalité vrai que lorsque $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire lorsque $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème 3 : fondamental

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = \dim E$, l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n -linéaires alternées sur E est facilement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

Soient $f \in \Lambda_n(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On a déjà vu que si on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $x_j \in E$ dans la base $\mathcal{B}$, donc $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$, alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^n x_{i,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n x_{i,n} e_{i_n}\right) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} x_{i_1,1} \dots x_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

mais comme ici f est alternée, on peut indexer la somme par $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n$ deux à deux distincts, ce qui revient à prendre une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout j , $i_j = \sigma(j)$. On obtient alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Comme f est aussi antisymétrique,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} \right) f(e_1, \dots, e_n)$$

$$\text{On pose } d : \begin{cases} E^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} \end{cases}$$

On a que pour tout $f \in \Lambda_n(E)$, $f = f(\mathcal{B}) \cdot d$ et donc $\Lambda_n(E) \subset td$.
Montrons que $d \in \Lambda_n(E)$.

- La n -linéarité vient de la linéarité l'application qui à un vecteur x associe sa i^{e} coordonnée dans $\mathcal{B}$.
- Pour montrer qu'elle est alternée, on montre qu'elle est antisymétrique :

$$d(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -d(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

avec le changement d'indice $\sigma' = \sigma \circ (i \ j)$.

Donc $\Lambda_n(E) = td$.

Dernier point : $d \neq 0$: il suffit de vérifier que $d(\mathcal{B}) = 1$ en remarquant que les coordonnées du vecteur e_i de base sont les $\delta_{i,j}$ donc le seul terme non nul de la somme définissant $d(\mathcal{B})$ est celui pour $\sigma = \text{id}$, et il vaut 1. ■

**Remarque**

R 12 – Deux formes n -linéaires alternées sur E de dimension n (oui, c'est bien le même n les deux fois) sont donc toujours proportionnelles, c'est ce qui importe.
Plus précisément, une base $\mathcal{B}$ de E étant donnée, il existe une unique forme n -linéaire alternée envoyant $\mathcal{B}$ sur le scalaire 1. On va l'appeler déterminant dans la base $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}$, et toute forme n -linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.



Voir exercice du TD : 11

**DÉTERMINANT****1 Définitions**

On fixe E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Définition 9 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ l'unique forme n -linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Si pour $1 \leq j \leq n$, $x_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathcal{B}$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) =$$

On note

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque

R 13 – Par définition, le déterminant est n -linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété 10 : du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E .

(i) **Formule de changement de base :**

$$(ii) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0 \text{ et } \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) =$$

(iii) $(x_1, \dots, x_n)$ est libre / une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

On montre que si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. On en déduit la définition :

Définition 10 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E .

Propriété 11 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

$$(i) \forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) =$$

$$(ii) \det(\text{id}_E) = 1.$$

$$(iii) \det(u \circ v) = \det u \times \det v.$$

$$(iv) \triangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda u) =$$

$$(v) u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0.$$

$$(vi) \det : (\mathcal{GL}(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times) \text{ est un morphisme de groupes.}$$

$$(vii) \text{ Si } u \in \mathcal{GL}(E), \det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}.$$

Remarque

R 14 – $\triangle$ $\det$ n'est pas linéaire : $\det(u + v) \neq \det u + \det v$ en général.

Exercice 4

On note $\mathcal{SL}(E)$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des endomorphismes de E de déterminant 1. Montrer qu'il a une structure de groupe.



Voir exercice du TD : 15

Définition 11 : du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

Remarque

R 15 – Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

R 16 – Une définition alternative équivalente consisterait à faire agir la permutation sur le numéro de colonne : c'est l'égalité avec le déterminant de la transposée de la propriété suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Propriété 12 : du déterminant d'une matrice carrée

- (i) Si $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.
- (ii) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par A dans une base de E , alors $\det A = \det u$.
- (iii) $\det I_n = 1$.
- (iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.
- (v) $\triangleleft$ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- (vi) $\det A^T = \det A$.
- (vii) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det A \neq 0\}$.
- (viii) $\det : (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.
- (ix) Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
- (x) Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.

Remarque

R 17 – $\triangleleft$ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : $\det$ n'est pas linéaire.

Exercice 5

On note $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer qu'il a une structure de groupe.

2**Calculs****Propriété 13 : Opérations sur un déterminant**

- (i) Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
- (ii) On ne change pas le déterminant avec les opérations

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

- (iii) En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.
- (iv) Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1 . Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.
- (v) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Définition 12 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A .
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

**Propriété 14 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Développement par rapport à L_i** $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

(ii) **Développement par rapport à C_j** $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

Remarque

R 20 – $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

R 21 – Dans le problème d'interpolation de Lagrange, les coefficients du polynôme inconnu $P = a_0 + \dots + a_n X^n$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(x_i) = y_i$ sont solutions d'un système linéaire de matrice de Vandermonde associée à $x_0, \dots, x_n$. Il y a bien une et une seule solution si les x_i sont deux à deux distincts.

Propriété 15 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

R 18 – $\triangle!$ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général!

R 19 – Les opérations sur les déterminants peuvent aussi être effectuées par blocs.

3 Formule de la comatrice**Propriété 17 : Formule de la comatrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

Si, de plus, A est inversible, alors

Remarque

R 22 – Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3 .

Propriété 16 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

=



Voir exercice du TD : 17

4 Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Définition 13 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel a **même orientation** qu'une autre base $\mathcal{B}'$ lorsque

Remarque

R 23 – ⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$!

Propriété 18 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 14 : Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Orienter un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites **directes**.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

Propriété 19 : Interprétation géométrique du déterminant

- (i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il est nul si $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, positif si $(\vec{u}, \vec{v})$ a même orientation que $\mathcal{B}$, négatif sinon.
- (ii) Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: il est nul si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée, positif si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ a même orientation que $\mathcal{B}$, négatif sinon.

5 Formules de Cramer (HP)

Propriété 20 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) un système de Cramer, c'est-à-dire à n équations et n inconnues et de matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

Remarque

R 24 – De nouveau, un intérêt surtout théorique!

Exercice 6

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \text{ lorsqu'il s'agit d'un système de Cramer.}$$