# 8 Groupe symétrique et déterminant [MP2I]

*Extrait du programme officiel* :

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Compléments d'algèbre linéaire** | |
| Transvections par blocs. Invariance du déterminant. | |
| Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. | |

# Table des matières



# I Groupe symétrique

## 1 Définition, structure

**Définition 1 : Permutation, groupe symétrique**

Si $E$ est un ensemble, on appelle **permutation** de $E$ toute bijection de $E$ dans $E$. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = [\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre $n$ (ou de degré $n$)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots\cdots\cdots n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \cdots\cdots \sigma(n) \end{pmatrix}$.

**Remarque**

**R1** – Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal $n$ mais $n!$ (!)

**R2** – Comme $\mathfrak{S}_n$ est fini, toute permutation est d'ordre fini, divisant $n!$ (théorème de Lagrange).

**Propriété 1 : Structure**

*$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.*

**Définition 2 : Orbites**

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La relation binaire définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **orbites** de $\sigma$.

Si $x \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathcal{O}(x) = \left\{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**Propriété 2 : Description d'une orbite**

*Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in [\![1,n]\!]$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}(x) = \{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{\ell-1}(x)\}$ (deux à deux distincts).*

**Démonstration**

$\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ \sigma^k(x) = x\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum $\ell$.

Il suffit ensuite, si $k \in \mathbb{Z}$, de poser la division euclidienne de $k$ par $\ell$. Les éléments sont bien distincts par minimalité de $\ell$. ■

**Remarque**

**R 3** – $\ell \leqslant$ ordre$(\sigma)$.

**Définition 3 : Support**

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $[\![1,n]\!]$ qui **ne sont pas** invariants par $\sigma$.

**Remarque**

**R 4** – C'est la réunion de toutes les orbites non réduites à un élément.

**Propriété 3 : Commutation de permutations à supports disjoints**

*(i) Le support d'une permutation est stable par cette permutation.*

*(ii) Deux permutations à supports disjoints commutent.*

**Démonstration**

On commence par vérifier que $\mathrm{Supp}(\sigma)$ est stable par $\sigma$ : si $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, $\sigma(i) \neq i$ donc $\sigma^2(i) \neq \sigma(i)$ par injectivité, donc $\sigma(i) \in \mathrm{Supp}(\sigma)$.

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ à supports $S$ et $S'$ disjoints.

- Si $i \notin S \sqcup S'$, $\sigma \circ \sigma'(i) = i = \sigma' \circ \sigma(i)$.
- Si $i \in S$, $i \notin S'$ donc $\sigma'(i) = i$ et $\sigma \circ \sigma'(i) = \sigma(i)$.
  Mais $\sigma(i) \in S$ donc $\sigma(i) \notin S'$ d'où $\sigma' \circ \sigma(i) = \sigma(i) = \sigma \circ \sigma'(i)$.
- Si $i \notin S$, $i \in S'$ et on conclut de la même manière.

On a donc bien $\sigma' \circ \sigma = \sigma \circ \sigma'$. ■

**Exercice 1 : Centre de $\mathfrak{S}_n$**

1. **Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i\ j)$ commutent, $\{i,j\}$ est stable par $\sigma$. La réciproque est-elle vraie ?**
2. **Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n) = \left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}$. Étudier le cas où $n = 2$.**

---

1. Si $\sigma \circ (i\ j) = (i\ j) \circ \sigma$, en évaluant en $i$, $\sigma(j) = (i\ j)(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$ par injectivité donc $\sigma(i)$ est dans le support de $(i\ j)$ donc dans $\{i,j\}$.
   Par symétrie, c'est aussi le cas de $\sigma(j)$.
   Pour la réciproque qui est bien vraie, il y a deux cas :
   - Ou bien $\sigma(i) = i$ et $\sigma(j) = j$ et alors $\sigma$ et $(i\ j)$ sont à supports disjoints donc commutent.
   - Ou bien $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$ et on vérifie que $\sigma \circ (i\ j)$ et $(i\ j) \circ \sigma$ envoient sur les mêmes images les nombres $i$, $j$ et $k \notin \{i,j\}$.
2. Si $\sigma \in \mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)$ elle commute avec des transpositions $(i\ j)$ et $(i\ k)$ où $i,j,k$ sont deux à deux distincts.
   Avec la question précédente, $\sigma(i) \in \{i,j\} \cap \{i,k\} = \{i\}$ . Comme c'est vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on en déduit que $\sigma = \mathrm{id}$. La réciproque est facile.
   $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_2) = \left\{\mathrm{id}_{[\![1,2]\!]}, (1\ 2)\right\} = \mathfrak{S}_2$

## 2 Cycles

**Définition 4 : Transposition, cycle**

- Une **transposition** $\tau$ est une permutation qui échange deux éléments $i$ et $j$ de $[\![1,n]\!]$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i,j\}$.
  On la note $\tau = (i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i,j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
  On appelle $p$-**cycle** une permutation $c$ de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement $p$ éléments $i_1, i_2, \dots, i_n$ de $[\![1,n]\!]$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2\ ;\ c(i_2) = i_3\ ;\ \cdots\ ;\ c(i_{p-1}) = i_p\ ;\ c(i_p) = i_1$$

  $p$ est la **longueur** du cycle $c$. On note $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

**Exercice 2 : Conjugaison de cycle (souvent utile)**

**Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $c$ un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.**

**Propriété 4 : Ordre d'un cycle**

*Un $p$-cycle est d'ordre $p$.*

**Démonstration**

Si $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$ est un $p$-cycle, on a bien $c^p = \mathrm{id}$ et pour tout $j \in [\![1, p-1]\!]$, $c^j(i_1) = i_{j+1} \neq i_1$ donc $c^j \neq \mathrm{id}$. ■

**Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints**

*Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

**Remarque**

**R5** – Donc les cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

**Démonstration**

- **Analyse** : Si on a une décomposition en produit de cycles à support disjoints, alors pour tout $x \in [\![1,n]\!]$, soit $x$ est invariant, soit $x$ est un élément d'un et un seul des cycles qui s'écrit $\begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \cdots & \cdots & \sigma^{\ell-1}(x) \end{pmatrix}$ avec $\sigma^{\ell}(x) = x$ et correspond donc à l'orbite de $x$.
- **Synthèse** : Soient $x_1, \ldots, x_m$ un élément de chaque orbite non réduite à un point. Alors $\mathcal{O}(x_i) = \left\{x_i, \sigma(x_i), \ldots, \sigma^{\ell_i-1}(x_i)\right\}$ avec $\sigma^{\ell_i}(x_i) = x_i$ et

$$\varphi = \prod_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} x_i & \sigma(x_i) & \cdots & \cdots & \sigma^{\ell_i-1}(x_i) \end{pmatrix}$$

est égale à $\sigma$ car les images sont les mêmes pour tout élément de $[\![1,n]\!]$, chacun apparaissant dans exactement une orbite.

**Remarque**

**R6** – Par commutativité des cycles à supports disjoints, on a facilement que si $m$ est le ppcm des ordres des cycles, $\sigma^m = \mathrm{id}$. Voir TD : montrer que le ppcm est égal à l'ordre de $\sigma$.

**Voir exercice du TD : 5**

**Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)**

*Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.*

**Remarque**

**R7** – Donc les transpositions de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

**Démonstration**

Se déduit du théorème précédent en sachant décomposer un cycle produit de transposition.
Voici deux propositions adaptables à tout cycle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p-1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} p-1 & p \end{pmatrix}$$

Mais savoir le démontrer directement n'est pas inintéressant (technique utile dans d'autres contextes.) Par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- **Initialisation** : pour $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ avec $\mathrm{id} = (1\ 2)^2$.
- **Hérédité** : Supposons que, pour un $n \geqslant 2$, $\mathfrak{S}_n$ est engendré par ses transpositions (HR).
  Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ ; on veut écrire $\sigma$ comme un produit de transpositions. On va discuter suivant $\sigma(n+1)$ :
  - **1er Cas** : Si $\sigma(n+1) = (n+1)$, alors $[\![1,n]\!]$ est stable par $\sigma$, et celle-ci induit une permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ de $[\![1,n]\!]$,

$$\sigma' : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & \sigma(k) \end{array} \right. .$$

  Par (HR), on peut trouver des transpositions $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_p \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma' = \tau'_1 \tau'_2 \cdots \tau'_p$.
  On peut alors prolonger les $\tau'_i$ en des permutations $\tau_i$ de $[\![1,n+1]\!]$ en posant $\tau_i(n+1) = n+1$.

On obtient la décomposition en remarquant que $\sigma$ et $\tau_1\tau_2\cdots\tau_p$ coïncident sur $[\![1,n]\!]$ par définition des $\tau_i'$ et en $n+1$ qui est laissé invariant par toutes ces permutations. Donc

$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p.$$

⋆ **2e Cas** : Si $\sigma(n+1) \neq (n+1)$, on se ramène au premier cas en remarquant posant

$$\rho = (\sigma(n+1) \quad n+1)\sigma.$$

$\rho \in \mathfrak{S}_{n+1}$ et $\rho(n+1) = n+1$ : d'après ce qui précède, on peut trouver $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ des transpositions de $[\![1,n+1]\!]$ telles que $\rho = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p$.
Alors $(\sigma(n+1) \quad n+1)\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p$ et donc

$$\sigma = (\sigma(n+1) \quad n+1)\tau_1\tau_2\cdots\tau_p$$

ce qui prouve le résultat dans ce cas.

- **La récurrence est établie.** Remarquons qu'à chaque étape, on ajoute au plus une transposition.

## 3 Signature

**Définition 5 : Inversions, signature**

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par $\sigma$ tout couple $(i,j)$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par $\sigma$.
On appelle **signature** de $\sigma$ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.
On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
Une permutation $\sigma$ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

**Démonstration**

Par définition,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{sgn}(\sigma(j)-\sigma(i)) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{|\sigma(j)-\sigma(i)|} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\sigma(j)-\sigma(i)|}$$

et l'on peut transformer le dénominateur en utilisant la bijectivité de $\sigma$

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} |\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{\{k,l\}\in\mathscr{P}} |k-l| = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i).$$

**Remarque**

**R 8** – La définition avec les inversions peut être oubliée tout de suite. Ce n'est pas ce qui importe dans la signature : il vaut mieux savoir se ramener à des cycles ou à des transpositions (voir ci-après).

**Théorème 2 : Morphisme de signature**

*Soit $n \geqslant 2$. L'application*

$$\varepsilon : \left|\begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\},\times) = (\mathbb{U}_2,\times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}\right.$$

*est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.*

**Démonstration : (Non exigible)**

**1re méthode**

$$\varepsilon\left(\sigma\circ\sigma'\right)=\prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}}\frac{\left(\sigma\circ\sigma'\right)(j)-\left(\sigma\circ\sigma'\right)(i)}{j-i}$$
$$=\prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}}\frac{\sigma\left(\sigma'(j)\right)-\sigma\left(\sigma'(i)\right)}{\sigma'(j)-\sigma'(i)}\prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}}\frac{\sigma'(j)-\sigma'(i)}{j-i}.$$

Dans le deuxième facteur de la dernière expression, on reconnaît directement $\varepsilon(\sigma')$.
Pour le premier, il faut au préalable réindexer (grâce à la bijectivité de $\sigma'$) en posant

$$\{k,\ell\}=\left\{\sigma'(i),\sigma'(j)\right\}$$

$$\prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}}\frac{\sigma\left(\sigma'(j)\right)-\sigma\left(\sigma'(i)\right)}{\sigma'(j)-\sigma'(i)}=\prod_{\{k,\ell\}\in\mathscr{P}}\frac{\sigma(k)-\sigma(\ell)}{k-\ell}=\varepsilon(\sigma).$$

**2e méthode** Il s'agit de comparer les nombres d'inversions de $\sigma\circ\sigma'$ aux nombres d'inversions de $\sigma$ et de $\sigma'$.
Les couples $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$, se classent en quatre cas distincts :

- $\sigma'(i)<\sigma'(j)$ et $\sigma\circ\sigma'(i)<\sigma\circ\sigma'(j)$ (on note $N_1$ le nombre de tels couples.)
- $\sigma'(i)<\sigma'(j)$ et $\sigma\circ\sigma'(i)>\sigma\circ\sigma'(j)$ (on note $N_2$ le nombre de tels couples.)
- $\sigma'(i)>\sigma'(j)$ et $\sigma\circ\sigma'(i)<\sigma\circ\sigma'(j)$ (on note $N_3$ le nombre de tels couples.)
- $\sigma'(i)>\sigma'(j)$ et $\sigma\circ\sigma'(i)>\sigma\circ\sigma'(j)$ (on note $N_4$ le nombre de tels couples.)

Le nombre d'inversion $I(\sigma')$ de $\sigma'$ est le nombres de couples $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$ tels que $\sigma'(i)>\sigma'(j)$ :

$$I(\sigma')=N_3+N_4.$$

Le nombre d'inversion $I(\sigma\circ\sigma')$ de $\sigma\circ\sigma'$ est le nombres de couples $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$ tels que $\sigma\circ\sigma'(i)>\sigma\circ\sigma'(j)$ :

$$I(\sigma\circ\sigma')=N_2+N_4.$$

Pour le nombre d'inversions de $\sigma$, il y a un peu plus de travail : remarquons que $(i,j)\mapsto\{\sigma'(i),\sigma'(j)\}$ est une bijection de l'ensemble des couples $(i,j)$ de $[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$ dans l'ensemble des paires de $[\![1,n]\!]$ par bijectivité de $\sigma'$.
Or compter les couples $(k,l)$, $k<l$ tels que $\sigma(k)>\sigma(\ell)$ revient

— à compter les paires $\{k,\ell\}$ distinctes telles que

$$\begin{cases}k<\ell\\ \sigma(k)>\sigma(\ell)\end{cases}\text{ou}\begin{cases}k>\ell\\ \sigma(k)<\sigma(\ell)\end{cases}$$

— ou encore, par la bijection précédente, à compter les couples $(i,j)$ de $[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$ et

$$\begin{cases}\sigma'(i)<\sigma'(j)\\ \sigma(\sigma'(i))>\sigma(\sigma'(j))\end{cases}\text{ou}\begin{cases}\sigma'(i)>\sigma'(j)\\ \sigma(\sigma'(i))<\sigma(\sigma'(j))\end{cases}$$

Ainsi,

$$I(\sigma)=N_2+N_3.$$

Finalement, $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')=(-1)^{2N_3+N_2+N_4}=(-1)^{N_2+N_4}=\varepsilon(\sigma\sigma')$.

■

**Propriété 5 : de la signature**

(i) *Si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de $N$ transpositions, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^N$.*
*En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.*

(ii) *Si $c$ est un $p$-cycle, $\varepsilon(c)=(-1)^{p-1}$.*

(iii) *Si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=\varepsilon(\sigma)$.*

Voir exercice du TD : 4, 6

**Exercice 3**
**Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si $p$ est le nombre d'orbites de $\sigma$, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$.**

## 4 Groupe alterné (HP)

**Définition 6 : Groupe alterné**

Le sous-groupe $\mathfrak{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ est appelé ***groupe alterné d'ordre $n$* (*ou de degré $n$*).**

**Démonstration**

On a bien $\mathfrak{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\{1\}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$ sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. ∎

**Propriété 6**

*Pour tout $n \geqslant 2$, $|\mathfrak{A}_n| = \dfrac{n!}{2}$.*

**Démonstration**

Soit $\tau$ une transposition (ou n'importe quelle autre permutation impaire), $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \tau\circ\sigma \end{array}\right.$ est bijective, d'inverse $\psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{A}_n \\ \rho & \longmapsto & \tau^{-1}\circ\rho \end{array}\right.$.

Ainsi, ces sous-ensembles de $\mathfrak{S}_n$ (donc finis) vérifient $|\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n|$ et $|\mathfrak{A}_n| + |\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{S}_n| = n!$ donc $|\mathfrak{A}_n| = \dfrac{n!}{2}$. ∎

**Remarque**

**R 9 –** Il y a donc autant de permutations paires que de permutations impaires dans $\mathfrak{S}_n$.

**Exemple**

**E 1 –** Décrivons $\mathfrak{S}_4$ : il contient $4! = 24$ permutations.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 = \big\{&\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3)\\ &(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3),\\ &(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\big\}\end{aligned}$$

et $\mathfrak{A}_4$ : il contient $24/2 = 12$ permutations.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_4 = \big\{&\mathrm{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3),\\ &(1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3)\big\}\end{aligned}$$

Soit $G = \{\mathrm{id}, \sigma_1 = (1\ 2)\circ(3\ 4), \sigma_2 = (1\ 3)\circ(2\ 4), \sigma_3 = (1\ 4)\circ(2\ 3)\}$.

Il s'agit d'un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{A}_4$ comme l'atteste sa table ci-contre, appelé groupe de Klein[1].

On peut montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbb{U}_2^2, \times)$ et que tout groupe d'ordre 4 est soit isomorphe au groupe de Klein, soit isomorphe à $(\mathbb{U}_4, \times)$ (en examinant les différentes tables possibles pour la loi de groupe.)

| $\circ$ | id | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
|---|---|---|---|---|
| id | id | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
| $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | id | $\sigma_3$ | $\sigma_2$ |
| $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | id | $\sigma_1$ |
| $\sigma_3$ | $\sigma_3$ | $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | id |

**Remarque**

**R 10 –** On peut facilement trouver des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ d'ordre 1, 2, 3, 4, et 12 mais il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6. On peut démontrer que ceux-ci sont soit cycliques (mais $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6), soit isomorphes au groupe diédral $D_6$ des isométries laissant invariant un triangle équilatéral (contenant 3 rotations et 3 symétries, engendré par une des rotations et une des symétries).

Par contre, on en trouve dans $\mathfrak{S}_4$ engendrés par un 3-cycle et une transposition facilement isomorphe à $D_6$ (qui est aussi isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, par ailleurs !).

Voir exercice du TD : 8

# II Formes $n$-linéaires

**Définition 7 : Application $n$-linéaire**

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, $E, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E^n \to F$ est dite **$n$-linéaire** lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad \text{est linéaire.}$$

(Linéarité par rapport à la $i^{\text{e}}$ variable.) c'est-à-dire $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x + \lambda y, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ + \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes $n$-linéaires.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

**Propriété 7 : Espace vectoriel de applications $n$-linéaires**

*$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

**Définition 8 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné**

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

- $f$ est dite **symétrique** si et seulement si $\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\quad \forall\, i\neq j,$
$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n).$$
- $f$ est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\quad \forall\, i\neq j,$
$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=-f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n).$$
- $f$ est dite **alternée** si et seulement si $\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\quad \forall\, i\neq j,$
$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_n)=0_{\mathbb{K}}.$$

**Propriété 8 : Caractérisations**

*Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.*

(i) *$f$ est symétrique si et seulement si $\forall\,\sigma\in\mathfrak{S}_n,\quad \forall\,(x_1,\dots,x_n)\in E^n,$*
$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=f(x_1,\dots,x_n).$$

(ii) *$f$ est antisymétrique si et seulement si $\forall\,\sigma\in\mathfrak{S}_n,\quad \forall\,(x_1,\dots,x_n)\in E^n,$*
$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)f(x_1,\dots,x_n).$$

(iii) *$f$ est alternée si et seulement si $\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in E^n,$*
$$(x_1,\dots,x_n)\text{ liée}\implies f(x_1,\dots,x_n)=0_{\mathbb{K}}.$$

**Démonstration**

$\Longleftarrow$ : facile avec une transposition ou une famille contenant le vecteur nul.

$\Longrightarrow$ : $\sigma$ se décompose en produit de transpositions : $\sigma=\tau_1\cdots\tau_p$. Chaque $\tau_i$ ne change pas $f$ si elle est symétrique, et sort un signe moins si $f$ est antisymétrique.

Ainsi, par récurrence, l'action de $\sigma$ ne change pas $f$ et fait sortir $(-1)^p=\varepsilon(\sigma)$ si $f$ est antisymétrique.

Finalement, si $f$ est alternée et $(x_1,\dots,x_n)$ liée, on a $i$ tel que $x_i=\sum_{j\neq i}\lambda_j x_j$, alors
$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j\neq i}\lambda_j f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)=0.$$

**Propriété 9 : Équivalence entre alternée et antisymétrique**

*Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors $f$ est alternée si et seulement si $f$ est antisymétrique.*

**Démonstration**

Si $f$ est alternée, $i\neq j$,
$$\begin{aligned}f(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n)=0_{\mathbb{K}}\\ &=f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)\\ &\quad+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)\\ &=f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)\\ &\quad+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Donc $f$ est antisymétrique.

Si $f$ est antisymétrique, en permutant, $f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_n) = -f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_n)$ donc

$2_{\mathbb{K}} f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$ et donc si $2_K \neq 0_K$, $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$ et $f$ est alternée. ■

**Remarque**

**R 11** – Le sens réciproque n'est en réalité vrai que lorsque $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire lorsque $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

**Théorème 3 : fondamental**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.*
*Si $n = \dim E$, l'ensemble des formes $n$-linéaires alternées sur $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.*

**Démonstration**

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes $n$-linéaires alternées sur $E$ est facilement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.
Soient $f \in \Lambda_n(E)$, $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de $E$. On a déjà vu que si on note $(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})$ les coordonnées de $x_j \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$, alors

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1} e_{i_1},\ldots,\sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n} e_{i_n}\right) = \sum_{1 \leqslant i_1,\ldots,i_n \leqslant n} x_{i_1,1}\ldots x_{i_n,n} f(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$$

mais comme ici $f$ est alternée, on peut indexer la somme par $1 \leqslant i_1,\ldots,i_n \leqslant n$ deux à deux distincts, ce qui revient à prendre une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout $j$, $i_j = \sigma(j)$. On obtient alors

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1}\ldots x_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$$

Comme $f$ est aussi antisymétrique,

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\ldots x_{\sigma(n),n}\right) f(e_1,\ldots,e_n)$$

On pose $d : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\ldots x_{\sigma(n),n} \end{array} \right.$

On a que pour tout $f \in \Lambda_n(E)$, $f = f(\mathscr{B}) \cdot d$ et donc $\Lambda_n(E) \subset \mathbb{K}d$.
Montrons que $d \in \Lambda_n(E)$.

- La $n$-linéarité vient de la linéarité l'application qui à un vecteur $x$ associe sa $i^{\text{e}}$ coordonnées dans $\mathscr{B}$.
- Pour montrer qu'elle est alternée, on montre qu'elle est antisymétrique :

$$d(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = -d(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$$

  avec le changement d'indice $\sigma' = \sigma \circ (i\ j)$.

Donc $\Lambda_n(E) = \mathbb{K}d$.
Dernier point : $d \neq 0$ : il suffit de vérifier que $d(\mathscr{B}) = 1$ en remarquant que les coordonnées du vecteur $e_i$ de base sont les $\delta_{i,j}$ donc le seul terme non nul de la somme définissant $d(\mathscr{B})$ est celui pour $\sigma = \mathrm{id}$, et il vaut $1$. ■

**Remarque**

**R 12** – Deux formes $n$-linéaires alternées sur $E$ de dimension $n$ (oui, c'est bien le même $n$ les deux fois) sont donc toujours proportionnelles, c'est ce qui importe.
Plus précisément, une base $\mathscr{B}$ de $E$ étant donnée, il existe une unique forme $n$-linéaire alternée envoyant $\mathscr{B}$ sur le scalaire $1$. On va l'appeler déterminant dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}$, et toute forme $n$-linéaire alternée sur $E$ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Voir exercice du TD : 11

# III Déterminant

## 1 Définitions

On fixe $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$.

**Définition 9 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

On appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ l'unique forme $n$-linéaire alternée sur $E$ notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1$.

Si pour $1\leqslant j\leqslant n$, $x_j\in E$ de coordonnées $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n}\end{vmatrix}.$$

**Remarque**

**R 13** – Par définition, le déterminant est $n$-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

**Propriété 10 : du déterminant**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ des bases de $E$.*

(i) ***Formule de changement de base*** : $\det_{\mathscr{B}'}=\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}$.

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=\left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}$.

(iii) $(x_1,\dots,x_n)$ *est libre/une base de $E$ si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\neq 0_{\mathbb{K}}$.

**Démonstration**

(i) $\det_{\mathscr{B}'}\in\Lambda_n(E)$.

(ii) On applique (i) à $\mathscr{B}$.

(iii) Un sens déjà vu. Pour l'autre, c'est le caractère alterné du déterminant. ■

On montre que si $u\in\mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

**Démonstration**

Soit $f(x_1,\dots,x_n)=\det_{\mathscr{B}}(u(x_1),\dots,u(x_n))$. Alors $f\in\Lambda_n(E)$ car $u$ est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est $n$-linéaire alterné.
Donc $f=f(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}=\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))\det_{\mathscr{B}}$ et donc

$$\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=f(\mathscr{B}')=\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}'))=\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(u(\mathscr{B}'))$$

et on conclut car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$. ■

**Définition 10 : Déterminant d'un endomorphisme**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de $u$ le scalaire

$$\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{(e_1,\dots,e_n)}(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de $E$.

**Propriété 11 : du déterminant d'un endomorphisme**

*Soient* $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) $\forall\,(x_1,\dots,x_n) \in E$,
$\det_{\mathscr{B}}(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \det u \times \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(iii) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(iv) $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ ,\ \det(\lambda u) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det u$.

(v) $u \in \mathscr{GL}(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$.

(vi) $\det : (\mathscr{GL}(E),\circ) \to (\mathbb{K}^*,\times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si* $u \in \mathscr{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right) = (\det u)^{-1}$.

**Démonstration**

(i) $f$ dans la preuve précédente.

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

(iii) découle de (i).

(iv) $n$-linéarité.

(v) $u \in \mathscr{GL}(E) \Longleftrightarrow u(\mathscr{B})$ base de $E \Longleftrightarrow \det u \neq 0$.

(vi) Conséquence de (iii).

(vii) Propriété de morphisme de groupes. ■

**Remarque**

**R 14 –** $\det$ n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général.

**Exercice 4**

**On note $\mathscr{SL}(E)$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des endomorphismes de $E$ de déterminant $1$. Montrer qu'il a une structure de groupe.**

**Voir exercice du TD : 15**

**Définition 11 : du déterminant d'une matrice carrée**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. On définit le **déterminant** de $A$ par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

**Remarque**

**R 15 –** Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

**R 16 –** Un définition alternative équivalente consisterait à faire agir la permutation sur le numéro de colonne : c'est l'égalité avec le déterminant de la transposée de la propriété suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

## Propriété 12 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si* $C_1, \dots, C_n$ *sont les vecteurs colonnes de* $A$ *et* $\mathscr{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

(ii) *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n$, $u \in \mathscr{L}(E)$ *représenté par* $A$ *dans une base de* $E$, *alors* $\det A = \det u$.

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) *Si* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.

(v) ⚠ *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det A$.

(vi) $\det A^\intercal = \det A$.

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si* $A$ *est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

**Démonstration**

(i) à (v) définitions puis conséquences des propriétés du déterminant d'un endomorphisme. (vi) :

$$\begin{aligned}
\det\left(A^\intercal\right) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \\
&\underset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j),j} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} \\
&\underset{\sigma'=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} = \det A.
\end{aligned}$$

Le dernier changement d'indice étant licite car $\left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{array} \right.$ est bijective.

(viii) : par (iv).

(ix) : par morphisme de groupe ou $\det\left(A^{-1}\right) \times \det A = \det\left(A^{-1} \times A\right) = \det I_n = 1$.

(x) Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes ou $\det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$. ■

**Remarque**

**R 17 –** ⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : $\det$ n'est pas linéaire.

**Exercice 5**

**On note $\mathscr{SL}_n(\mathbb{K})$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des matrices de déterminant $1$. Montrer qu'il a une structure de groupe.**

## 2 Calculs

**Propriété 13 : Opérations sur un déterminant**

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$$

*(transvections successives.)*

(iii) *En multipliant par $\lambda$ une ligne ou une colonne, on multiplie par $\lambda$ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par $-1$. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

**Définition 12 : Mineurs, cofacteurs, comatrice**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice $(i, j)$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant $L_i$ et $C_j$ à $A$.
- On appelle **cofacteur** d'indice $(i, j)$ le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de $A$ la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \mathrm{Com}\, A = (C_{i,j})_{i,j} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{i,j}.$$

**Propriété 14 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(i) ***Développement par rapport à** $L_i$* $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j} a_{i,j}.$

(ii) ***Développement par rapport à** $C_j$* $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j} a_{i,j}.$

**Propriété 15 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs**

*Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors*

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

**Remarque**

**R 18** – ⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

**R 19** – Les opérations sur les déterminants peuvent aussi être effectuées par blocs.

**Démonstration**

- **Première méthode** : Soit la forme $n$-linéaire alternée

$$d : (C_1, \dots, C_n) \mapsto \begin{vmatrix} C_1 | \cdots | C_n & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix}.$$

On a alors $d = d(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Donc, en appliquant $d$ aux colonnes de $A$, $\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = d(\mathscr{B}) \det A$.

Or $d(\mathscr{B}) = \begin{vmatrix} I_n & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \det B$ en effectuant $n$ développement successifs par rapport à la première colonne.

- **Deuxième méthode** : On remarque que (multiplier à gauche par une matrice diagonale (par blocs) revient à multiplier les blocs-lignes par les blocs diagonaux correspondants)

$$\begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & C \\ (0) & I_p \end{pmatrix},$$

les déterminants des deux matrices se calculant facilement par développement successifs par rapport à $C_1$/dernière ligne. ∎

**Propriété 16 : Déterminant de Vandermonde**

*Soient* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots\cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots\cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots\cdots\cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots\cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

**Remarque**

**R 20** – $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les $x_i$ sont deux à deux distincts.

**R 21** – Dans le problème d'interpolation de Lagrange, les cœfficients du polynôme inconnu $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ sont solutions d'un système linéaire de matrice de Vandermonde associée à $x_0, \dots, x_n$. Il y a bien une et une seule solution si les $x_i$ dont deux à deux distincts.

**Démonstration**

- **Première méthode** : Soit $P$ le polynôme $P = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ (c'en est bien un !).
En développant par rapport à $L_n$ (première expression), on a alors $P = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} D_{n,j} X^{j-1}$ où les $D_{n,j}$ ne contiennent pas $X$, donc $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont racines de $P$.

Donc on a $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda (X - x_1) \cdots (X - x_{n-1})$ où $\lambda$ est le cœfficient en $X^{n-1}$ : c'est le mineur égal à $V(x_1, \dots, x_{n-1})$. Ainsi,

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{1 \leqslant i < n} (x_n - x_i).$$

On conclut alors par récurrence (facilement initialisée).

- **Deuxième méthode** : Avec $C_j \leftarrow C_j - x_n C_{j-1}$ en commençant par la dernière :

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots\cdots x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots\cdots x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1-x_n) \cdots\cdots x_1^{n-2}(x_1-x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2-x_n) \cdots\cdots x_2^{n-2}(x_1-x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \end{vmatrix}$$

Donc, en développant par rapport à $L_n$ et factorisant,

$$V(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) V(x_1,\dots,x_{n-1})$$

et on conclut par récurrence.

**Voir exercice du TD : 9, 10, 12 à 14**

## 3 Formule de la comatrice

**Propriété 17 : Formule de la comatrice**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$A \times (\mathrm{Com}\, A)^\intercal = (\mathrm{Com}\, A)^\intercal \times A = \det(A) \cdot I_n.$$

*Si, de plus, $A$ est inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\mathrm{Com}\, A)^\intercal.$$

**Démonstration**

Si $j, k \in [\![1, n]\!]$, $\left((\mathrm{Com}\, A)^\intercal \times A\right)_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} \left((\mathrm{Com}\, A)^\intercal\right)_{j,i} a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,k}$.

Ainsi, si $k = j$, on reconnaît le développement par rapport à $C_j$ du déterminant de $A$, donc les cœfficients diagonaux de $(\mathrm{Com}\, A)^\intercal \times A$ valent tous $\det A$.

Sinon, cela ressemble au développement d'une matrice $A'$ dont toutes les colonnes sont celles de $A$ sauf $C_j$ qui a été remplacée par $C_k$.

On a alors $\det A' = 0$ par caractère alterné du déterminant.

Le développement par rapport à $C'_j$ s'écrit $0 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta'_{i,j} a'_{i,j}$.

Or dans $\Delta'_{i,j}$, on a supprimé la colonne $C'_j$, donc les cœfficients correspondent exactement à ceux de $A$, donc $\Delta'_{i,j} = \Delta_{i,j}$.

De plus, pour tout $k$, $a'_{i,j} = a_{i,k}$.

Finalement, si $j \neq k$, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,k} = 0$.

Ainsi, $(\mathrm{Com}\, A)^\intercal \times A = \det(A) \cdot I_n$.

Pour l'autre relation, il suffit de raisonner sur les lignes plutôt que sur les colonnes.

**Remarque**

**R 22 –** Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou $3$.

**Voir exercice du TD : 17**

# 4 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

**Définition 13 : Avoir même orientation qu'une base**

On dit qu'une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathcal{B}'$ lorsque

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) > 0.$$

**Remarque**

**R 23** – ⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$ !

**Propriété 18 : Relation d'équivalence**

*C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.*

**Définition 14 : Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel**

**Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel**, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

**Propriété 19 : Interprétation géométrique du déterminant**

(i) *Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ : il est nul si $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, positif si $(\vec{u}, \vec{v})$ a même orientation que $\mathcal{B}$, négatif sinon.*

(ii) *Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ : il est nul si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée, positif si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ a même orientation que $\mathcal{B}$, négatif sinon.*

# 5 Formules de Cramer (HP)

**Propriété 20 : Formules de Cramer (HP)**

*Soit $(S)$ un système de Cramer, c'est-à-dire à $n$ équations et $n$ inconnues et de matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

*Soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $A$. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,*

$$x_j = \frac{\det\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{j-1} \middle| b \middle| C_{j+1} \middle| \cdots \middle| C_n\right)}{\det A}.$$

**Démonstration**

$Ax = b \iff x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = b$.

Donc $\det\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{j-1} \middle| b \middle| C_{j+1} \middle| \cdots \middle| C_n\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \det\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{j-1} \middle| C_k \middle| C_{j+1} \middle| \cdots \middle| C_n\right) = x_j \det A$ par caractère $n$-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. ■

**Remarque**

**R 24** – De nouveau, un intérêt surtout théorique !

**Exercice 6**

**Résoudre** $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$ **lorsqu'il s'agit d'un système de Cramer.**