Suites et séries de fonctions numériques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Convergences simple et uniforme

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers** f lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers** f lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.

Propriété 1 : CU $\Longrightarrow$ CS

La convergence uniforme vers une fonction f implique la convergence simple vers cette fonction.

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$,*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$$

*(majoration **uniforme**, c'est-à-dire que α_n ne dépend pas de $x \in X$),*

alors

C1 *(f_n) converge uniformément vers f.*

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1 *les f_n sont bornées*

H2 *elles convergent uniformément vers f*

alors

C1 *f est bornée.*

Propriété 4 : CU et norme infini

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ si et seulement si à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $N_\infty(f_n - f) \to 0$.

Corollaire 1 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Propriété 5 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, alors la convergence de (f_n) n'est pas uniforme.

Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Si on arrive à prouver que les $f_n - f$ sont bornées au moins à partir d'un certain rang et à calculer $N_\infty(f_n - f)$ (par exemple en étudiant les variations), on peut conclure en vérifiant si $N_\infty(f_n - f) \to 0$ ou non.
- Sinon,
  - ⋆ pour prouver qu'il y a convergence uniforme, on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
  - ⋆ pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
    - ○ Soit les f_n sont bornées mais pas f. On verra des variantes plus loin avec la continuité ou les limites.
    - ○ Soit on trouve une suite $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

BY NC SA

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Soit $f : X \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$, $x_0 \in \overline{X}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X, mais, malheureusement, la réciproque est fausse.

Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de** $+\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap [a, +\infty[$.

De même, lorsque X n'est pas minoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de** $-\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $-\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $b > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]-\infty, b]$.

Propriété 6 : CU sur tout segment $\Longrightarrow$ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X.

II Continuité et limite

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0.*

Alors

C1 *f est continue en x_0.*

Corollaire 2 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).*

Alors

C1 *f est continue sur I.*

Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent, ou bien qu'une des limites n'existe pas alors que les f_n ont bien une limite en a.

3 Intégration sur un segment

Théorème 3 : Interversion limite et intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tels que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a, b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Méthode 4 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 4 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

4 Dérivation

Théorème 5 : Interversion limite et dérivée (classe $\mathcal{C}^1$)

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = g$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)' = \lim f'_n$ ».*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Théorème 6 : Généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction g_j sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *$f = g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = g_j$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ ».*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème 7 : Généralisation à la classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$ ».*

III Approximations uniformes

1 Par des fonctions en escalier

Théorème 8 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier

On donne trois énoncés équivalents :

- *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*
- *Soit f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Il existe une suite fonction $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $N_\infty(\varphi_n - f) \to 0$.*
- *Soit f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier telle que $N_\infty(\varphi - f) \leqslant \varepsilon$.*

Corollaire 3

L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est dense dans $(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K}), N_\infty)$.

2 Par des polynômes

Théorème 9 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

- *Toute fonction continue **sur un segment** à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.*
- *Soit f continue **sur le segment** $[a, b]$. Il existe une suite de fonctions $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $N_\infty(p_n - f) \to 0$.*
- *Soit f continue **sur le segment** $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $N_\infty(p - f) \leqslant \varepsilon$.*

Corollaire 4

L'ensemble des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_\infty)$.

IV Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

1 Convergence simple

Définition 3 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si pour tout $x\in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge.Lorsque c'est le cas,

- $f:x\in X\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n\in\mathbb{N}$, $R_n=f-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

2 Convergence uniforme

Définition 4 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X, c'est-à-dire lorsqu'il existe $f:X\to\mathbb{K}$ telle que

- à partir d'un certain rang, S_n-f bornée sur X,
- $N_\infty(S_n-f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Propriété 7 : CU $\Longrightarrow$ CS

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement vers f.

Propriété 8 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1 $\alpha_n\to 0$

H2 $\forall x\in X,\ |S_n(x)-f(x)|\leqslant\alpha_n$ *au moins à partir d'un certain rang*

alors

C1 $\sum f_n$ *converge uniformément sur X vers f.*

Propriété 9 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X, R_n le reste d'ordre n.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Propriété 10 : Condition nécessaire de CU

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $N_\infty(f_n)\to 0$.

Méthode 5 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n)\not\to 0$.

Méthode 6 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n|=|S_n-f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

3 Convergence normale

Définition 5 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

Propriété 11 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X,

- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument,*
- *$\sum f_n$ converge uniformément.*

Méthode 7 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Propriété 12 : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X.

4 Continuité

Théorème 10 : de continuité d'une somme de série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur I.*

5 Double limite

Théorème 11 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

C1 *$\sum b_n$ converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Méthode 8 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

6 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème 12 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ telle que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

7 Primitive

Théorème 13 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

8 Classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 14 : Classe $\mathcal{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème 15 : Classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

9 Grand classique incontournable (mais HP)

C'est hors-programme mais il faut absolument savoir montrer toutes les propriétés des fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet définies par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

La fonction ζ de Riemann est

- définie sur $]1, +\infty[$;
- normalement convergente sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 1$;
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$, ses dérivées successives s'exprimant comme sommes de séries de fonctions ;
- décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$;
- de limites $+\infty$ en 1^+ et 1 en $+\infty$;
- équivalente à $\frac{1}{x-1}$ en 1^+ ;
- non uniformément convergente au voisinage de 1.

La fonction η de Dirichlet est

- définie sur $]0, +\infty[$;
- normalement convergente sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 1$;
- uniformément convergente sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$;
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, ses dérivées successives s'exprimant comme sommes de séries de fonctions ;
- exprimable pour $x > 1$ à l'aide de $\zeta(x)$.