Suites et séries de fonctions numériques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Convergences simple et uniforme

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers f** lorsque

On note alors

Remarque

R 1 – C'est-à-dire

R 2 – Écrire $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f(x)$ n'a absolument aucun sens.

R 3 – Certaines propriétés telles que la parité, la monotonie, la périodicité peuvent se transmettre par convergence simple (en passant à la limite dans l'identité traduisant cette propriété.)

Exemple

E 1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{n+x}{1+nx}$

E 2 – $g_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$

E 3 – Une fonction triangulaire h_n nulle en 0 et près de 1 et d'intégrale égale à 1 sur $[0,1]$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsqu'

On note alors

Remarque

R 4 – Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f-\varepsilon$ et $f+\varepsilon$.
La différence avec la convergence simple est que cette fois, le rang ne dépend que de ε, plus de x.

Propriété 1 : CU $\Longrightarrow$ CS

La convergence uniforme vers une fonction f implique la convergence simple vers cette fonction.

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

H1

H2

alors

C1 *(f_n) converge uniformément vers f.*

CC BY NC SA

Remarque

R5 – Il suffit d'avoir la majoration uniforme à partir d'un certain rang seulement pour pouvoir conclure.

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1

H2

alors

C1

Propriété 4 : CU et norme infini

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ si et seulement si

Remarque

R6 – Mais rien n'indique que les f_n soient bornées a priori.

Exemple

E4 – $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{n}$

Corollaire 1 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff$$

Propriété 5 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe

alors la convergence de (f_n) n'est pas uniforme.

Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Si on arrive à prouver que les $f_n - f$ sont bornées au moins à partir d'un certain rang et à calculer $N_\infty(f_n - f)$ (par exemple en étudiant les variations), on peut conclure en vérifiant si $N_\infty(f_n - f) \to 0$ ou non.
- Sinon,
  - pour prouver qu'il y a convergence uniforme, on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
  - pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
    - Soit les f_n sont bornées mais pas f. On verra des variantes plus loin avec la continuité ou les limites.
    - Soit on trouve une suite $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

Exemple : On reprend les mêmes exemples

E5 – $f_n : x \mapsto \dfrac{n+x}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

E6 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$

E7 – h_n sur $[0,1]$.

Exercice 1 : CCINP 11 – Preuve de non convergence uniforme

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Soit $f : X \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$, $x_0 \in \overline{X}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X, mais, malheureusement, la réciproque est fausse.

Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $+\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap [a, +\infty[$.

De même, lorsque X n'est pas minoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $-\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $-\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $b > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]-\infty, b]$.

Propriété 6 : CU sur tout segment $\Longrightarrow$ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors

Remarque

R 7 – La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X, ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X.
De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

R 8 – À noter aussi qu'on ne prouve pas une convergence uniforme en découpant X : c'est une convergence globale qui ne peut s'obtenir en réunissant des convergences uniforme sur des parties de X, contrairement à la convergence simple qui, elle, est ponctuelle.

Exemple

E 8 – $g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0, 1[$, mais pas sur $[0, 1[$ comme déjà vu.

II Continuité et limite

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1

H2

Alors

C1

Corollaire 2 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

Alors

C1

Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

Exemple

E 9 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : CCINP 9, 12 – Convergence uniforme de suites de fonctions et transfert de continuité

CC BY NC SA

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1

H2

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1

C2

Autrement dit, les limites existant bien, $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

Remarque

R 9 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !
(Mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a.)

Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$ alors que ces limites existent, ou bien qu'une des limites n'existe pas alors que les f_n ont bien une limite en a.

Exemple

E 10 – $g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$

3 Intégration sur un segment

Théorème 3 : Interversion limite et intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tels que

H1

H2

alors

C1

C2

Méthode 4 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 : CCINP 10 – Limite d'intégrale sur un segment par convergence uniforme

Théorème 4 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1

H2

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1

C2

Remarque

R 10 – En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a, b]$, on obtient bien $F_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(b)$.

4 Dérivation

Théorème 5 : Interversion limite et dérivée (classe $\mathcal{C}^1$)

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Remarque

R 11 – Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n, mais hors-programme.

Théorème 6 : Généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Remarque

R 12 – Pour obtenir une classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit que les f_n le soient et que la convergence des $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ soit uniforme au moins à partir d'un certain rang. En général, elle l'est à partir du rang 1 d'où l'énoncé suivant. Il est aussi possible qu'il y ait convergence uniforme de toutes les dérivées y compris de $\left(f_n^{(0)}\right)_n = (f_n)_n$.

Théorème 7 : Généralisation à la classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

CC BY NC SA

III Approximations uniformes

1 Par des fonctions en escalier

Théorème 8 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier

On donne trois énoncés équivalents :

-
-
-

Remarque

R 13 – On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ en escalier telle que $N_\infty(\varphi - f) \leqslant \varepsilon$.

Alors, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient φ_n en escalier telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f.

Corollaire 3

L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{K}),N_\infty)$.

2 Par des polynômes

Théorème 9 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

-
-
-

Corollaire 4

L'ensemble des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_\infty)$.

Remarque

R 14 – Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

Exercice 4

Montrer que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante, puis qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

Exercice 5 : CCINP 48 – Orthogonal de $\mathbb{R}[x]$ pour la norme N_1

IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 3 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si

Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque

R 15 – ⚠ f désigne ici la somme de la **série de fonctions** $\sum f_n$ et non la limite simple de la **suite de fonctions** (f_n).

R 16 – Ainsi, la **série** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

R 17 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fausse.

R 18 – La somme d'une série de fonctions (et le reste si elle converge simplement) sont des fonctions.

Exemple : Étudier la convergence simple de $\sum f_n$

E 11 – $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

E 12 – $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

E 13 – $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$

Lorsque cela a un sens, on appelle **fonction ζ de Riemann** la fonction

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2 Convergence uniforme

Définition 4 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque

c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \to \mathbb{K}$ telle que

-
-

CC BY NC SA

Remarque

R 19 – On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonctions comme convergence uniforme locale de (S_n).

Propriété 7 : CU $\Longrightarrow$ CS

Propriété 8 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1

H2

alors

C1 *$\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f.*

Propriété 9 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X, R_n le reste d'ordre n.

Exercice 6 : CCINP 8 – Convergence de séries alternées

Propriété 10 : Condition nécessaire de CU

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors

Méthode 5 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) \not\to 0$.

Exercice 7 : CCINP 17 – Convergence uniforme de série de fonctions

Méthode 6 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

E 14 – Fonction ζ sur $]1, +\infty[$

3 Convergence normale

Définition 5 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

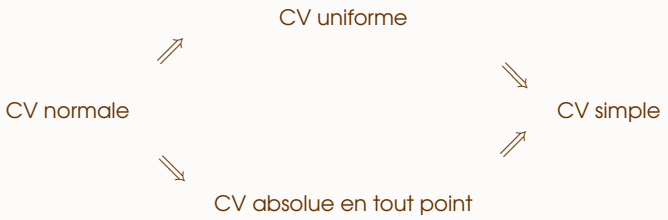
Propriété 11 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X,

- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument,*
- *$\sum f_n$ converge uniformément.*

Remarque

R 20 – On a le diagramme



Les réciproques sont fausses.

R 21 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemple

E 15 – Pour la fonction ζ, il n'y a pas convergence normale sur $]1,+\infty[$, mais sur tout $[a,+\infty[$. On retrouve la convergence uniforme.

E 16 – $\sum n^\alpha x\mathrm{e}^{-n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$. Sinon, convergence normale sur $[a,+\infty[$.



Méthode 7 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple

E 17 – $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété 12 : Critère séquentiel de non convergence normale

Exemple

E 18 – $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8 : CCINP 15 – Convergences uniforme et normale d'une série de fonctions

CC BY NC SA

4 Continuité

Théorème 10 : de continuité d'une somme de série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

Alors

C1

Exemple

E 19 – ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

5 Double limite

Théorème 11 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1

H2

Alors

C1

C2

Autrement dit, les limites existant bien, $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

Remarque

R 22 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !

Exemple

E 20 – ζ en $+\infty$.

Exercice 9

On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. **Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.**
2. **Montrer que la somme f de la série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.**
3. **Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.**
4. **Calculer la limite de f en $+\infty$.**

Exercice 10 : CCINP 53 – Étude d'une série de fonctions

Exercice 11 : Contre-exemple en 0 sur tout segment

Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. **Étudier la convergence simple puis calculer la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$.**
2. **Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.**
3. **Que penser de la double-limite en 0^+ ?**

Méthode 8 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.
Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

Exercice 12 : CCINP 18 (modifié) – Continuité et modes de convergence d'une série entière

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) Sur quel type d'intervalle y a-t-il convergence normale ? Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$.
   (c) La fonction S est-elle continue sur D ?

6 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème 12 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ telle que

H1

H2

alors

C1

C2

C3

Exercice 13 : CCINP 14 – Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

7 Primitive

Théorème 13 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1

H2

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1

C2

CC BY NC SA

8 Classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 14 : Classe $\mathcal{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Théorème 15 : Classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

Exercice 15 : CCINP 16 – Développement asymptotique de H_n et classe $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions

Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathcal{C}^1$.

Calculer f' et étudier les variations de f.

Exercice 17

1. Montrer que $\zeta : x \in]1,+\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et donner une expression de ses dérivées sous forme de somme.
2. Étudier la convexité de ζ.
3. Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

9 Grand classique incontournable (mais HP)

Exercice 18 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.
4. Étudier les variations et la convexité de ζ.
5. Calculer la limite en $+\infty$.
6. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
7. Donner un équivalent de ζ en 1 par comparaison série-intégrale.
8. Tracer le graphe de ζ.
9. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
10. Démontrer que η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.