7

Suites et séries de fonctions numériques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

Table des matières

7 Suites et séries de fonctions numériques **1**

I Convergences simple et uniforme **3**
1 Convergence simple . . . 3
2 Convergence uniforme . . . 4
a Définition . . . 4
3 Convergence uniforme locale . . . 7

II Continuité et limite **7**
1 Continuité . . . 7
2 Théorème de la double limite . . . 8
3 Intégration sur un segment . . . 10
4 Dérivation . . . 11

III Approximations uniformes **12**
1 Par des fonctions en escalier . . . 12
2 Par des polynômes . . . 13

IV Séries de fonctions **15**
1 Convergence simple . . . 15
2 Convergence uniforme . . . 16
3 Convergence normale . . . 18
4 Continuité . . . 19
5 Double limite . . . 20
6 Intégration terme à terme sur un segment . . . 22
7 Primitive . . . 23
8 Classe $\mathcal{C}^k$ . . . 23
9 Grand classique incontournable (mais HP) . . . 24

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Convergences simple et uniforme

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** X **vers** f lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

Remarque

R 1 – C'est-à-dire $\forall\, x \in X,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_{x,\varepsilon},\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. $N_{x,\varepsilon}$ dépend à la fois de x et de ε.

R 2 – Écrire $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f(x)$ n'a absolument aucun sens.

R 3 – Certaines propriétés telles que la parité, la monotonie, la périodicité peuvent se transmettre par convergence simple (en passant à la limite dans l'identité traduisant cette propriété.)

Exemple

E 1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{n+x}{1+nx}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
On remarque que les f_n sont bornées mais pas f.

E 2 – $g_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement vers $g = \mathbb{1}_{\{1\}}$.
On remarque que les g_n sont continues mais pas g.

E 3 – On considère pour $n \geqslant 2$, h_n affine par morceaux telle que $h_n(0) = 0$, $h_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$ et $h_n(x) = 0$ si $\dfrac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1$.
La courbe a une forme de triangle afin de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Alors $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ et on remarque que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t \not\longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\, x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.

Remarque

R 4 – Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.
La différence avec la convergence simple est que cette fois, le rang ne dépend que de ε, plus de x.

Propriété 1 : CU $\Longrightarrow$ CS

La convergence uniforme vers une fonction f implique la convergence simple vers cette fonction.

Démonstration

Si on a un N qui convient pour tous les x, alors pour tout x, on a un N qui convient. ■

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$*
*(majoration **uniforme**, c'est-à-dire que α_n ne dépend pas de $x \in X$),*

alors

C1 *(f_n) converge uniformément vers f.*

Remarque

R5 – Il suffit d'avoir la majoration uniforme à partir d'un certain rang seulement pour pouvoir conclure.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut. ■

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1 *les f_n sont bornées*

H2 *elles convergent uniformément vers f*

alors

C1 *f est bornée.*

Démonstration

Avec $\varepsilon = 1$, on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall\, x \in X,\ \ |f(x)| - |f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.
En particulier, pour tout $x \in X$, $|f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1$. ■

Propriété 4 : CU et norme infini

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ si et seulement si à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $N_\infty(f_n - f) \to 0$.

Remarque

R6 – Mais rien n'indique que les f_n soient bornées a priori.

Exemple

E4 – $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{n}$ converge uniformément vers $\exp$ et aucune de ces fonctions n'est bornée.

Démonstration

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $\forall\, x \in X,\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ donc, à partir de ce rang, $f_n - f$ est bornée et $N_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Dans le sens réciproque, c'est une application de la propriété précédente avec $\alpha_n = N_\infty(f_n - f)$. ■

Corollaire 1 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration

C'est bien la même définition, les $f_n - f$ étant bien bornées. ■

Propriété 5 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$,alors la convergence de (f_n) n'est pas uniforme.

Démonstration

Par contraposée : si la convergence est uniforme, alors les $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang, et $N_\infty(f_n - f) \to 0$. Or $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant N_\infty(f_n - f)$, donc $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.
Ou bien, directement, si $\varepsilon > 0$, on a un rang N à partir duquel pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $x = x_n$, on obtient $\forall\, n \geqslant N,\ |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve bien que $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$. ■

Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Si on arrive à prouver que les $f_n - f$ sont bornées au moins à partir d'un certain rang et à calculer $N_\infty(f_n - f)$ (par exemple en étudiant les variations), on peut conclure en vérifiant si $N_\infty(f_n - f) \to 0$ ou non.
- Sinon,
  - ⋆ pour prouver qu'il y a convergence uniforme, on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall\, x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
  - ⋆ pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
    - ◦ Soit les f_n sont bornées mais pas f. On verra des variantes plus loin avec la continuité ou les limites.
    - ◦ Soit on trouve une suite $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

Exemple : On reprend les mêmes exemples

E5 – Pour le premier, il n'y a pas convergence uniforme car f n'est pas bornée alors que les f_n le sont.

E6 – $g_n : x \mapsto x^n$. Alors $N_\infty(g_n - g) = 1$ ou bien $g_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - g\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$. Il n'y a pas convergence uniforme.

E7 – $h_n\left(\frac{1}{n}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) = n \not\to 0$.

Exercice 1 : CCINP 11 – Preuve de non convergence uniforme

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Soit $f : X \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$, $x_0 \in \overline{X}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X, mais, malheureusement, la réciproque est fausse.

Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de** $+\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap [a, +\infty[$.

De même, lorsque X n'est pas minoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de** $-\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $-\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $b > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]-\infty, b]$.

Propriété 6 : CU sur tout segment $\Longrightarrow$ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X.

Démonstration

On peut toujours inclure un voisinage $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ de $x_0 \in X$ dans un segment quitte à réduire η. ■

Remarque

R 7 – La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X, ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X.

De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

R 8 – À noter aussi qu'on ne prouve pas une convergence uniforme en découpant X : c'est une convergence globale qui ne peut s'obtenir en réunissant des convergences uniforme sur des parties de X, contrairement à la convergence simple qui, elle, est ponctuelle.

Exemple

E 8 – $g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0, 1[$, mais pas sur $[0, 1[$ comme déjà vu.

II CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0.*

Alors

C1 *f est continue en x_0.*

Démonstration

Soit $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[= V$.
Alors, si $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f au voisinage de x_0 fournit un rang N à partir duquel, pour tout $x \in V$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. C'est donc le cas pour $x = x_0$.
En prenant $n = N$, la continuité de f_N, fournit un $\delta > 0$ tel que sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Ainsi, si $|x - x_0| \leqslant \min(\eta, \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Cela prouve bien que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$. ■

Corollaire 2 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).*

Alors

C1 *f est continue sur I.*

Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

Exemple

E 9 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : CCINP 9, 12 – Convergence uniforme de suites de fonctions et transfert de continuité

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarque

R 9 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** ! (Mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a.)

Démonstration : Hors programme

On traite le cas où a est fini.

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leqslant 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leqslant 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a, elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a.

On obtient donc, pour $n \geqslant N$, $|b_n| \leqslant 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \to b$.

On montre alors que $b_n \to b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + \left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| + \left|f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}\right| + \left|b_{\varphi(n)} - b\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geqslant n$, on a alors aussi $\left|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W_n' et W_n'' de a sur lesquels $|b_n - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $\left|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $\left|b_{\varphi(n)} - b\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geqslant \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W_n' \cap W_n''$, alors on tire $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \to b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \to b$), qui est aussi continue a, donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$. ■



Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim\limits_{x \to a}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right)$ alors que ces limites existent, ou bien qu'une des limites n'existe pas alors que les f_n ont bien une limite en a.

Exemple

E 10 – $g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$: le résultat ne tient pas malgré la convergence uniforme sur tout segment, et on retrouve l'absence de convergence uniforme sur $[0, 1]$.

3 Intégration sur un segment

Théorème 3 : Interversion limite et intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tels que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

On suppose $a \leqslant b$ quitte à multiplier par -1.
$f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang, et à partir de ce rang, on peut écrire

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Méthode 4 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3 : CCINP 10 – Limite d'intégrale sur un segment par convergence uniforme

Théorème 4 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Démonstration

Sur un segment $[b,c]$ de I, on note $m = \min(a,b)$ et $M = \max(a,c)$. On calcule

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant |x-a|\,N_{\infty,[a,x]}(f_n - f) \leqslant (M-m)N_{\infty,[m,M]}(f_n - f) \to 0$$

d'où la conclusion.

Remarque

R 10 – En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a, b]$, on obtient bien $F_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(b)$.

4 Dérivation

Théorème 5 : Interversion limite et dérivée (classe $\mathcal{C}^1$)

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = g$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ ».*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Remarque

R 11 – Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n, mais hors-programme.

Démonstration

- Le théorème de transfert de continuité nous donne déjà la continuité de g sur I (avec **H1** et **H3**).
- Soit $a \in I$. On pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème précédent, (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I, donc en particulier converge simplement vers F. Or pour tout $x \in I$, $F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) - f(a)$, donc par unicité de la limite, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée g.
- Si S segment de I, $x \in S$,

  $$|f_n(x) - f(x)| = |F_n(x) + f_n(a) - F(x) - f(a)| \leqslant |F_n(x) - F(x)| + |f_n(a) - f(a)| \leqslant N_{\infty,S}(F_n - F) + |f_n(a) - f(a)|$$

  qui est indépendant de x et converge vers 0. Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I. ■

Théorème 6 : Généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction g_j sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *$f = g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = g_j$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ ».*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Démonstration

On applique le théorème précédent à toutes les dérivées successives, de la n° k à la n° 1. ■

Remarque

R 12 – Pour obtenir une classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit que les f_n le soient et que la convergence des $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ soit uniforme au moins à partir d'un certain rang. En général, elle l'est à partir du rang 1 d'où l'énoncé suivant. Il est aussi possible qu'il y ait convergence uniforme de toutes les dérivées y compris de $\left(f_n^{(0)}\right)_n = (f_n)_n$.

Théorème 7 : Généralisation à la classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$ ».*

III Approximations uniformes

1 Par des fonctions en escalier

Théorème 8 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier

On donne trois énoncés équivalents :

- *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*
- *Soit f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Il existe une suite fonction $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a,b]$, c'est-à-dire $N_\infty(\varphi_n - f) \to 0$.*
- *Soit f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier telle que $N_\infty(\varphi - f) \leqslant \varepsilon$.*

Remarque

R 13 – On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ en escalier telle que $N_\infty(\varphi - f) \leqslant \varepsilon$.
Alors, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient φ_n en escalier telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration

Cas continu Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in [a,b],\quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h = \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(a_{k+1} - a_k) \leqslant \eta$.

On définit alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b[$, on a k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$ et $|x - a_k| \leqslant |a_{k+1} - a_k| \leqslant \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$, soit $x = b$ et $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$.
On a donc bien $N_\infty(f - \varphi) \leqslant \varepsilon$.

Cas continu par morceaux Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Chaque $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$: on a $\varphi_k \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que $N_\infty(f_k - \varphi_k) \leqslant \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon$, soit on a k tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leqslant \varepsilon$.
On a donc bien $N_\infty(f - \varphi) \leqslant \varepsilon$.

Corollaire 3

L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est dense dans $(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K}), N_\infty)$.

2 Par des polynômes

Théorème 9 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

- *Toute fonction continue **sur un segment** à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.*
- *Soit f continue **sur le segment** $[a, b]$. Il existe une suite de fonctions $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $N_\infty(p_n - f) \to 0$.*
- *Soit f continue **sur le segment** $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $N_\infty(p - f) \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration : Non exigible

Preuve classique par les polynômes de Bernstein : si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}.$$

On montre que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, 1]$.
Soit $\varepsilon < 0$ et $\eta > 0$ un module de continuité associé à $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\forall\, x, x' \in [0, 1], \quad |x - x'| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons $x \in [0, 1]$ et $n \geqslant 2$. On calcule

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1 - x)^{n-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1 - x)^{n-k}$$

Notons $A_x = \left\{ k \in [\![0, n]\!], \ \left| \frac{k}{n} - x \right| \leqslant \eta \right\}$. On remarque que f est bornée en tant que fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et que pour $k \in [\![0, n]\!] \setminus A_x$, $\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \geqslant 1$ donc $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \frac{2 N_\infty(f)}{\eta^2} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2$.

On a alors

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &\leqslant \sum_{k\in A_x}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\notin A_x}\binom{n}{k}\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2-2x\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{k(k-1)}{n(n-1)}+\left(\frac{1}{n}-2x\right)\cdot\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\left(x^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}x^k(1-x)^{n-k}+\left(\frac{1}{n}-2x\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\left(x^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n}-2x\right)x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\left(x^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\left(\frac{1}{n}-2x\right)x\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2N_\infty(f)}{\eta^2}\cdot\frac{x-x^2}{n}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2N_\infty(f)}{n\eta^2}
\end{aligned}$$

avec $\dfrac{2N_\infty(f)}{n\eta^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc on a un rang N **indépendant de** x tel que pour $n\geqslant N$,

$$0\leqslant\frac{2N_\infty(f)}{n\eta^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $x\in[0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$, ce qui signifie que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))$ converge uniformément vers f.

Le résultat s'étend facilement aux fonctions continue sur un segment $[a,b]$ via un changement de variable affine bijectif $t\in[0,1]\mapsto(1-t)a+tb\in[a,b]$. ■

Corollaire 4

L'ensemble des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_\infty)$.

Remarque

R 14 – Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

Exercice 4

Montrer que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante, puis qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

Solution : En effet, commençons par remarquer quitte à prendre une limite en une borne infinie que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante.

On confond le polynôme et la fonction polynomiale associée.

Supposons alors qu'une fonction f est limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un intervalle non borné I. On a un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N$, P_n-f est bornée. Mais alors, si $n\geqslant N$, $P_n-P_N=(P_n-f)+(f-P_N)$ est bornée sur I qui ne l'est pas et polynomiale, donc est constante.

On a donc $c_n\in\mathbb{K}$ tel que $P_n=P_N+c_n=P_N-P_N(a)+P_n(a)$ où a est un point quelconque de I.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout $x\in I$, $f(x)=P_N(x)-P_N(a)+f(a)$ donc f est une fonction polynomiale.

Exercice 5 : CCINP 48 – Orthogonal de $\mathbb{R}[x]$ pour la norme N_1

IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 3 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge.Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque

R 15 – ⚠ f désigne ici la somme de la **série de fonctions** $\sum f_n$ et non la limite simple de la **suite de fonctions** (f_n).

R 16 – Ainsi, la **série** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

R 17 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fausse.

R 18 – La somme d'une série de fonctions (et le reste si elle converge simplement) sont des fonctions.

Exemple : Étudier la convergence simple de $\sum f_n$

E 11 – $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

E 12 – $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

E 13 – $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$

Lorsque cela a un sens, on appelle **fonction ζ de Riemann** la fonction

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2 Convergence uniforme

Définition 4 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X, c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \to \mathbb{K}$ telle que

- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur X,
- $N_\infty(S_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque

R 19 – On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonctions comme convergence uniforme locale de (S_n).

Propriété 7 : CU $\Longrightarrow$ CS

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement vers f.

Démonstration

En effet, si $\sum f_n$ converge uniformément, (S_n) converge uniformément donc simplement, donc $\sum f_n$ converge simplement. ■

Propriété 8 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 $\forall x \in X,\ |S_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ *au moins à partir d'un certain rang*

alors

C1 $\sum f_n$ *converge uniformément sur X vers f.*

Démonstration

Héritée des suites de fonctions. ■

Propriété 9 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X, R_n le reste d'ordre n.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition. ■

Exercice 6 : CCINP 8 – Convergence de séries alternées

Propriété 10 : Condition nécessaire de CU

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $N_\infty(f_n) \to 0$.

Démonstration

$(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 donc $(f_n) = (R_n - R_{n-1})_n$ aussi car, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x)| \leqslant N_\infty(R_n - R_{n-1}) \leqslant N_\infty(R_n) + N_\infty(R_{n-1}) \to 0$$

avec une majoration indépendante de x. ■

Méthode 5 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) \not\to 0$.

Exercice 7 : CCINP 17 – Convergence uniforme de série de fonctions

Méthode 6 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

E 14 – Fonction ζ sur $]1, +\infty[$: On trouve $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ par comparaison à une intégrale.
On en déduit la convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 1$.

3 Convergence normale

Définition 5 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

Propriété 11 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X,

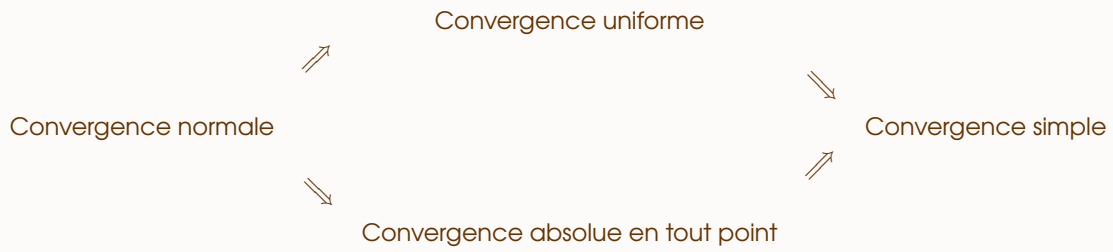
- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument,*
- *$\sum f_n$ converge uniformément.*

Démonstration

- Pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant N_\infty(f_n)$ et on conclut par comparaison de termes généraux positifs dans le cas de convergence.
- $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} N_\infty(f_n)$ qui ne dépend pas de x et tend vers 0, ce qui donne bien la convergence uniforme de la série de fonctions. ■

Remarque

R 20 – On a le diagramme



Les réciproques sont fausses.

R 21 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemple

E 15 – Pour la fonction ζ, il n'y a pas convergence normale sur $]1,+\infty[$, mais sur tout $[a,+\infty[$.
On retrouve la convergence uniforme.

E 16 – $\sum n^\alpha x e^{-n^2 x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$.
Sinon, convergence normale sur $[a,+\infty[$.

Méthode 7 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple

E 17 – $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété 12 : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X.

Démonstration

Par contraposée, si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(a_n)| \leqslant N_\infty(f_n)$ qui est un terme général de série convergente, donc par comparaison dans le cas positif, $\sum f(a_n)$ converge absolument. ■

Exemple

E 18 – $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8 : CCINP 15 – Convergences uniforme et normale d'une série de fonctions

4 Continuité

Théorème 10 : de continuité d'une somme de série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur I.*

Démonstration

Par théorème de continuité version suite de fonctions, on a bien

H1 Pour tout n, S_n est continue sur I.

H2 La suite de fonctions (S_n) converge uniformément au voisinage de chaque point de I.

■

Exemple

E 19 – ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

5 Double limite

Théorème 11 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

C1 $\sum b_n$ *converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Démonstration

Par théorème de la double limite version suite de fonctions, on a bien

H1 La suite de fonctions (S_n) converge uniformément au voisinage de a.

H2 Pour tout n, $S_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

On en déduit que (β_n) converge et que $f(x)$ tend vers sa limite lorsque x tend vers a. ■

Remarque

R 22 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !

Exemple

E 20 – ζ en $+\infty$ tend vers 1.

Exercice 9

On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. **Étudier la convergence simple de** $\sum f_n$.
2. **Montrer que la somme f de la série de fonctions est continue sur** $\mathbb{R}_+^*$.
3. **Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur** $\mathbb{R}_+^*$.
4. **Calculer la limite de f en** $+\infty$.

Exercice 10 : CCINP 53 – Étude d'une série de fonctions

Exercice 11 : Contre-exemple en 0 sur tout segment

Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. **Étudier la convergence simple puis calculer la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$.**
2. **Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.**
3. **Que penser de la double-limite en 0^+ ?**



Méthode 8 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.
Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

Exercice 12 : CCINP 18 (modifié) – Continuité et modes de convergence d'une série entière

On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. **Étudier la convergence simple de cette série.**
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. **(a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.**
   (b) Sur quel type d'intervalle y a-t-il convergence normale ? Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$.
   (c) La fonction S est-elle continue sur D ?

Solution :

1. Si $|x|<1$, il y a convergence absolue car $\dfrac{|x|^n}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Si $|x|>1$, il y a divergence grossière car $\dfrac{|x|^n}{n} \to +\infty$.
   Si $x=-1$, la série harmonique diverge, si $x=1$, la série harmonique alternée converge (par exemple par le TSSA).
   Finalement, la série de fonctions converge simplement sur $D =]-1,1]$.

2. (a) $N_{\infty,]-1,1]}(u_n) = \dfrac{1}{n}$ donc il n'y a pas de convergence normale sur $D =]-1,1]$.
   Comme $u_n(x) \xrightarrow[x\to -1]{} = \dfrac{1}{n}$ qui est un terme général de série divergente, le théorème de la double limite ne s'applique pas et donc il n'y a pas de convergence uniforme sur $D =]-1,1]$.

   (b) Par contre, sur tout intervalle de la forme $]-a,a[$ où $0<a<1$, $N_{\infty,[-a,a]}(u_n) = \dfrac{a^n}{n} = |u_n(a)|$ qui est un terme général de série convergence, donc il y a convergence normale sur $[-a,a]$.
   On a donc aussi convergence uniforme sur ce type d'intervalle.
   Reste à savoir s'il y a convergence uniforme au voisinage de 1.
   Or, le théorème spécial s'appliquant pour $x \in [0,1]$, la majoration du reste donne

$$\forall\, x \in [0,1],\quad |R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   qui ne dépend pas de x et tend vers 0.
   Il y a donc bien convergence uniforme sur $[0,1]$.

   (c) Comme
   H1 les u_n sont toutes continues sur $]-1,1]$ et comme, d'après la question précédente,
   H2 $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de $D =]-1,1]$,
   S est continue sur D.

6 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème 12 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ telle que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a,b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

Par théorème d'intégration sur un segment version suite de fonctions, on a bien

H1 Pour tout n, S_n est continue sur $[a,b]$.

H2 La suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

On en déduit que f est continue sur $[a,b]$, et que $\left(\int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge (donc que $\sum \int_a^b f_n$ converge) vers $\int_a^b f$. ■

Exercice 13 : CCINP 14 – Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Réponse : $2\ln 2 - \dfrac{5}{4}$.

7 Primitive

Théorème 13 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

Démonstration

S'obtient comme dans le théorème précédent à partir de la version suites de fonctions. ■

8 Classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 14 : Classe $\mathcal{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Démonstration

Par théorème de classe $\mathcal{C}^k$ version suite de fonctions, on a bien

H1 Pour tout n, S_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

H2 Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(S_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I.

H3 La suite de fonctions $\left(S_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I.

On en déduit que f est classe $\mathcal{C}^k$ sur I, que pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, que $f^{(j)}$ est la limite de $\left(S_n^{(j)}\right)$ et que la convergence est bien uniforme sur tout segment de I. ■

Exercice 15 : CCINP 16 – Développement asymptotique de H_n et classe $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions

Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathcal{C}^1$.

Calculer f' et étudier les variations de f.

Théorème 15 : Classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

Exercice 17

1. **Montrer que $\zeta : x \in]1,+\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et donner une expression de ses dérivées sous forme de somme.**
2. **Étudier la convexité de ζ.**
3. **Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.**

9 Grand classique incontournable (mais HP)

Exercice 18 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. **Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?**
2. **Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?**
3. **Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.**
4. **Étudier les variations et la convexité de ζ.**
5. **Calculer la limite en $+\infty$.**
6. **Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?**
7. **Donner un équivalent de ζ en 1 par comparaison série-intégrale.**
8. **Tracer le graphe de ζ.**
9. **Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?**

10. Démontrer que η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

1. $]1, +\infty[$ par critère de convergence des séries de Riemann.
2. $[a, +\infty[$ où $a > 1$.
3. $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{\ln^k(n)}{n^x}$. CN sur tout $[a, +\infty[$. D'où la classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}$.
4. ζ est décroissante par passage à la limite car toutes les f_n le sont, donc les sommes partielles le sont aussi ou par négativité de ζ'.
5. 1 par double limite.
6. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.
   2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme ζ est décroissante, elle a une limite ℓ finie ou $+\infty$ en 1.
   Or on a $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \to +\infty$. Ainsi $\ell = +\infty$.
   Ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant A$ à partir d'un rang N.
   Pour $n = N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V, $\zeta(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \geqslant A$. Donc ζ tend vers $+\infty$ en 1.
7. On trouve $\zeta \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
8. ζ est décroissante avec une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
9. CS sur $\mathbb{R}_*^+$ par TSSA.
   CN sur $[a, +\infty[$, $a > 1$.
   CU sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ par majoration du reste TSSA.
10. TSSA apcr : CU sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ de toutes les dérivées.
11. Simplifier $\zeta(x) - \eta(x)$.