7

Polynômes et fractions rationnelles

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

En fait tout corps convient, mais pour certaines propriétés, on a besoin qu'il soit de caractéristique nulle, c'est-à-dire tel que $n_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

I L'ALGÈBRE DES POLYNÔMES

1 Polynômes formels à une indéterminée

Se donner un polynôme à cœfficents dans $\mathbb{K}$, c'est se donner la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_d, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ de ses cœfficients ayant un nombre fini de termes non nuls (nulle à partir d'un certain rang). On parle alors de suite **presque nulle**.

On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, X^k la suite presque nulle $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k^e}, 0, 0, \ldots)$.

Cela permet de transformer la notation $(a_0, a_1, \ldots, a_d, 0, 0, \ldots)$ en

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d + 0 + 0 + \cdots = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k}_{\text{somme finie}} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

On note parfois $P(X)$ pour P.

- X est appelée **indéterminée**. L'indéterminée n'est pas un nombre ! Elle n'a pas de valeur. Elle représente la suite presque nulle $(0, 1, 0, 0, \ldots)$.
- L'ensemble des polynômes à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Par définition, $P = \sum a_k X^k = Q = \sum b_k X^k \iff \forall k,\ a_k = b_k$ (égalité de deux suites). Les cœfficients d'un polynôme formel sont uniques.
- Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les cœfficients sont nuls, noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou plus simplement 0.
- On appelle monôme tout polynôme de la forme aX^k avec $k \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$.
- On appelle **polynôme constant** tout polynôme $P = a$ où $a \in \mathbb{K}$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on appelle **degré de P**, noté $\deg P$, le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$ (qui existe bien).

  $$\deg P = \max\{k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0\}$$

  $a_{\deg P}$ est appelé **cœfficient dominant** de P, noté $\operatorname{cd} P$.

  Si $\operatorname{cd} P = 1$, P est dit **unitaire** ou **normalisé**.

  On pose $\deg 0 = -\infty$.
- On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$ l'ensemble des polynômes de degré **au plus** n.

  $$\mathbb{K}_n[X] = \left\{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,\ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\right\} = \operatorname{Vect}\left(1, X, \ldots, X^n\right).$$

2 Opérations sur les polynômes

Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les lois $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$ par

- $P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$
- $\lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) X^k$
- $P \times Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \times \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell X^\ell = \sum_{\substack{m=0 \\ (m=k+\ell)}}^{+\infty} c_m X^m$

  en faisant une sommation par diagonales, c'est-à-dire avec

  $$c_m = \sum_{m=k+\ell} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{\ell=0}^{m} a_{m-\ell} b_\ell.$$
- $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$.

Propriété 1 : Opérations algébriques et degré

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $P + Q$, $P \times Q$ et λP sont des polynômes et

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ *avec égalité si et seulement si* $\deg P \neq \deg Q$ *ou* $(\deg P = \deg Q$ *et* $\operatorname{cd} P + \operatorname{cd} Q \neq 0)$
- $\deg(\lambda P) = \deg P$ *et* $\operatorname{cd}(\lambda P) = \lambda \operatorname{cd} P$ ***si $\lambda \neq 0$****, sinon* $\lambda P = 0$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ *et* $\operatorname{cd}(PQ) = \operatorname{cd} P \operatorname{cd} Q$.
- *Si Q **non constant**, alors*

  $$\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$$

  et

  $$\operatorname{cd}(P \circ Q)) = \operatorname{cd} P \times (\operatorname{cd} Q)^{\deg P}.$$

Propriété 2 : Structure d'algèbre commutative intègre

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative intègre d'élément unité le polynôme constant 1 et dont le groupe des inversible est $\mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$ (polynômes constants non nuls.)

3 Dérivation formelle

Définition 1 : Polynôme dérivé

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **polynôme dérivé de** P, noté P', le polynôme défini par
$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$
$$= a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}.$$

et $0' = 0$.

Plus généralement, on note $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P'' = (P')'$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Propriété 3 : de la dérivation

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) $\deg P' = \deg P - 1$ *si P non constant, $-\infty$ sinon.*
Plus généralement, $\deg P^{(n)} = \deg P - n$ si $\deg P \geqslant n$, $-\infty$ sinon.
En général, $\deg P^{(n)} \leqslant \deg P - n$.

(ii) ***Linéarité*** : $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$.

(iii) ***Formule de Leibniz***
$(PQ)' = P'Q + PQ'$ *et plus généralement,* $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

(iv) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

II Fonctions polynomiales, racines

1 Fonctions polynomiales

Définition 2 : Fonction polynôme associée

Si $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note
$$\tilde{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \tilde{P}(x) = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k \end{array} \right.$$
appelée **fonction polynomiale associée à** P.

Propriété 4 : Fonction polynôme et opérations

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) $\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$.

(ii) $\widetilde{P \times Q} = \tilde{P} \times \tilde{Q}$.

(iii) $\widetilde{\lambda P} = \lambda \tilde{P}$.

(iv) $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$.

(v) *Sur $\mathbb{R}$, $\tilde{P}$ est dérivable et $\tilde{P}' = \widetilde{P'}$.*

2 Formule de Taylor

Théorème 1 : Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n$$
la somme étant finie, c'est-à-dire
$$P(X+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n.$$

Corollaire 1 : Formule de Mac Laurin

$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!} X^n$ *c'est-à-dire les cœfficients de P sont les $a_n = \frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!}$.*

3 Racines

Définition 3 : Racine

$a \in \mathbb{K}$ est un **zéro** ou une **racine** de $\mathbb{P} \in \mathbb{K}[X]$ lorsque $\tilde{P}(a) = 0$.

Propriété 5 : Racine et division

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(i) *a est racine de P si et seulement si $(X-a) | P$.*

(ii) *$x_1, \ldots, x_n$ sont racines deux à deux distinctes de P si et seulement si $(X-x_1)\cdots(X-x_n) | P$.*

Corollaire 2 : Nombre de racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(i) *Si $P \neq 0$, P admet au plus $\deg P$ racines.*

(ii) *Si P admet strictement plus de $\deg P$ racines, $P = 0$.*

(iii) *Si P admet une infinité de racines, $P = 0$.*

Corollaire 3 : Identification polynôme et fonction polynôme

Si $\mathbb{K}$ est infini et $\tilde{P} = \tilde{Q}$, alors $P = Q$. On peut alors confondre P et $\tilde{P}$.

Définition 4 : Multiplicité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$.
On appelle **ordre de multiplicité** de a en tant que racine de P l'entier

$$m = \max\left\{k \in \mathbb{N},\ (X-a)^k \middle| P\right\}$$

Ainsi, a est racine d'ordre m si et seulement si $(X-a)^m \big| P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$ si et seulement si on a $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$.

- Si $m = 0$, a n'est pas racine de P.
- Si $m \geqslant 1$, a est racine de P.
- Si $m = 1$, a est racine simple de P.
- Si $m = 2$, a est racine double de P.
- Si $m = 3$, a est racine triple de P.
- Si $m \geqslant 2$, a est racine multiple de P.

Propriété 6

$x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts sont racines d'ordre au moins $m_1, \ldots, m_n$ respectivement si et seulement si $(X-x_1)^{m_1} \cdots (X-x_n)^{m_n} \big| P$.

Propriété 7 : Caractérisation de l'ordre

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.
a est racine d'ordre m de P si et seulement si $\forall\, k \in [\![0, m-1]\!]$, $\tilde{P}^{(k)}(a) = 0$ et $\tilde{P}^{(m)}(a) \neq 0$.

Corollaire 4 : Multiplicité des racines de P vs P'

Si a est racine d'ordre $m \geqslant 2$ de P, a racine d'ordre $m-1$ de P'. La réciproque est fausse si on ne suppose pas a racine de P.

4 Polynômes scindés

Définition 5 : Polynôme scindé

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda(X-y_1)\cdots(X-y_n),$$

c'est-à-dire si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P = \lambda(X-x_1)^{m_1}\cdots(X-x_p)^{m_p}.$$

Alors $\deg P \geqslant 1$, $\lambda = \operatorname{cd} P$, $x_1, \ldots, x_p$ sont les racines de P deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.

Propriété 8 : Caractérisation avec les racines

Soit P un polynôme non constant admettant exactement p racines d'ordres respectifs $m_1, \ldots, m_p$ dans $\mathbb{K}$. P est scindé si et seulement si

$$m_1 + \cdots + m_p = \deg P.$$

Théorème 2 : Théorème de d'Alembert-Gauß (Théorème fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.
*On dit que le corps $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.*

Corollaire 5 : Version alternative équivalente

Tout polynôme à cœfficients complexes non constant est scindé.

Corollaire 6 : Divisibilité et racines

Si P est scindé, alors $P|Q$ si et seulement si toutes les racines de P sont racines de Q avec des multiplicités au moins égales à celles pour P.

5 Relations cœfficients-racines

Définition 6 : Fonctions symétriques élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.
On appelle **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, \ldots, x_n$ les nombres

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \qquad (n \text{ termes})$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \qquad \left(\tfrac{n(n-1)}{2} \text{ termes}\right)$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n.$$

$$\vdots$$

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}. \qquad \left(\tbinom{n}{k} \text{ termes}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n. \qquad (1 \text{ terme})$$

Propriété 9 : Relations cœfficients-racines

*Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$, $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$, **scindé** sur $\mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_n$ ses racines **comptées avec leur multiplicité**, donc $P = a_n(X - x_1)\cdots(X - x_n)$. En notant σ_k les fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \ldots, x_n$,*

- $\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. *(somme)*
- $\vdots$
- $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.
- $\vdots$
- $\sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$. *(produit)*

Ainsi,

$$P = a_n(X^n - \underbrace{\sigma_1}_{\text{somme}} X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n \underbrace{\sigma_n}_{\text{produit}}).$$

III Interpolation de Lagrange

- **Problématique** : Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ scalaires $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ fixés (par exemple pour tout k, $y_k = f(x_k)$ où f est une fonction connue ou non).

  On cherche des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

  $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(x_k) = y_k.$$

  C'est un problème d'**interpolation**.

- **Principe** : C'est un problème linéaire.

  L'application $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_k))_{k \in [\![0,n]\!]} \end{array} \right.$ est une application linéaire injective entre deux espaces de dimension $n+1$.
  En effet, son noyau est réduit aux polynômes de degré au plus n admettent les $n+1$ racines distinctes $x_0, \ldots, x_n$, c'est-à-dire au polynôme nul.
  Il s'agit donc d'un isomorphisme.
  On peut aussi remarquer que sa matrice dans les bases canoniques est la matrice de Vandermonde associée à $x_0, \ldots, x_n$.

Définition 7 : Polynômes de Lagrange

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, on appelle i^e polynôme de Lagrange associé à $(x_0, \ldots, x_n)$ le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Propriété 10 : Polynôme d'interpolation de Lagrange

Étant donné $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que $\forall i$, $P(x_i) = y_i$.

Il s'agit de $P = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot Li$.

Comme le problème est linéaire (en fait affine), on peut le résoudre sur $\mathbb{K}[X]$ en passant par solution particulière et solution du problème homogène associé.

Propriété 11

Les polynômes d'interpolation associés aux points $((x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n))$ sont les polynômes $P + \left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i)\right) Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

IV Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$ (MPI)

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, comme, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'anneau $\mathbb{K}[X]$

Propriété 12 : Description des polynômes associés

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, P et Q sont associés si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.

Théorème 3 : Division euclidienne polynomiale

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Théorème 4 : $\mathbb{K}[X]$ est principal

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal.
En particulier, tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit sous la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. Si l'idéal est non nul, on peut choisir P de manière unique en le supposant unitaire.

2 PGCD de deux polynômes

Définition 8 : PGCD

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls.

$$I = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = \{AU + BV,\ U, V \in \mathbb{K}[X]\}$$

est un idéal non réduit à zéro de $\mathbb{K}[X]$.

Son unique générateur unitaire est appelé pgcd de A et B, noté $A \wedge B$.

Propriété 13 : Relation de Bézout

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on peut trouver $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = A \wedge B$.

Méthode 1 : Trouver une relation de Bézout

- On peut trouver une relation de Bézout en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu, donc en remontant les divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide en élimant tous les restes successifs (sauf le dernier, bien sur, qui est le PGCD), comme pour les entiers.
- Une méthode plus inattendue consiste à calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{A \wedge B}{AB}$ et à multiplier par AB cette décomposition.

  Par exemple, $(X-1) \wedge (X-2)^2 = 1$ et on calcule facilement la décomposition en éléments simples

  $$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}$$

  de laquelle on déduit

  $$1 = (X-2)^2 - (X-1)(X-2) - (X-1) = (X-2)^2 + (3-X)(X-1)$$

  qui est une relation de Bézout entre $X-1$ et $(X-2)^2$.

Propriété 14 : Caractérisation du PGCD

Soit $(A, B) \neq (0, 0)$.

$$D = A \wedge B \Longleftrightarrow \begin{cases} D \text{ est unitaire} \\ D | A \text{ et } D | B \\ \forall\, C \in \mathbb{K}[X],\quad (C|A \text{ et } C|B) \Longrightarrow C|D \end{cases}$$

Il s'agit donc du plus grand diviseur unitaire au sens de la division.

Définition 9 : Polynômes premiers entre eux

$A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont dits **premiers entre eux** lorsque $A \wedge B = 1$, c'est-à-dire lorsque les seuls diviseurs communs sont les polynômes constants non nuls.

Théorème 5 : de Bézout

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

$$A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow \exists\, U, V \in \mathbb{K}[X],\quad AU + BV = 1$$

Corollaire 7

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

(i) $A \wedge BC = 1 \Longleftrightarrow A \wedge B = A \wedge C = 1$

(ii) *Si $D = A \wedge B$, on a $A_1, B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = DA_1$, $B = DB_1$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$.*

Théorème 6 : Lemme de Gauß

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

Si $A|BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A|C$.

Propriété 15 : Cas des polynômes scindés

*Si A ou B est **scindé**, $A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow A$ et B n'ont pas de racine commune.*

3 PGCD d'une famille finie de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Définition 10 : pgcd de n polynômes

Soient $(A_1, \ldots, A_n) \in (\mathbb{K}[X])^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. On note $D = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n = \bigwedge_{k=1}^{n} A_k$ l'unique polynôme unitaire tel que $A_1\mathbb{K}[X] + \cdots + A_n\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$.

Propriété 16

(i) ***Associativité*** *: $A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.*

(ii) *Les diviseurs communs à $A_1, \ldots, A_n$ sont exactement les diviseurs de $\bigwedge_{k=1}^{n} A_k$.*

(iii) ***Relation de Bézout*** *: On a $U_1, \ldots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A_1U_1 + \cdots A_nU_n = \bigwedge_{k=1}^{n} A_k$.*

Définition 11 : Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble

$A_1,\dots,A_n$ sont dits **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque $\bigwedge_{k=1}^{n} A_k = 1$, c'est-à-dire que le seul diviseur unitaire commun à tous les A_k est 1.

$A_1,\dots,A_n$ sont dits **premiers entre eux deux à deux** lorsque $\forall\, i \neq j,\quad A_i \wedge A_j = 1$.

Propriété 17

Premiers entre eux deux à deux $\Longrightarrow$ premiers entre eux dans leur ensemble, mais la réciproque est fausse pour plus de deux polynômes.

Théorème 7 : de Bézout

$A_1,\dots,A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si on a $U_1,\dots,U_n$ tels que $A_1U_1+\dots+A_nU_n = 1$.

Propriété 18 : Diviseurs deux à deux premiers entre eux

*Si $A_1,\dots,A_n$ sont premiers entre eux **deux à deux** et divisent B, alors $A_1\cdots A_n | B$.*

4 Polynômes irréductibles

Définition 12 : Polynôme irréductible

On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ **non constant** dont les seuls diviseurs sont les λ et λP pour $\lambda\in\mathbb{K}^*$, c'est-à-dire tels que $P = UV \Longrightarrow U \text{ ou } V$ inversible.

Les autres polynômes sont dits **réductibles**.

Propriété 19 : des polynômes irréductibles

Soit P un polynôme irréductible, et $A, A_1,\dots,A_n\in\mathbb{K}[X]$.

(i) Soit $P|A$, soit $P\wedge A = 1$.

(ii) $P|A_1\cdots A_n \Longleftrightarrow \exists i$ tel que $P|A_i$.

Théorème 8 : Décomposition en produit d'irréductibles

Tout $A\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ s'écrit de manière unique à l'ordre des facteurs près sous la forme

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1}\cdots P_k^{\alpha_k}$$

où $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{K}^*$, $P_1,\dots,P_k$ irréductibles deux à deux distincts unitaires, $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}^*$.

Alors $\lambda = \operatorname{cd} A$, $P_1,\dots,P_k$ sont les diviseurs irréductibles unitaires de A.

Propriété 20 : Expression du PGCD en produit d'irréductibles

Si $A = \lambda P_1^{\alpha_1}\cdots P_k^{\alpha_k}$ et $B = \mu P_1^{\beta_1}\cdots P_k^{\beta_k}$ décompositions en irréductibles (avec exposants éventuellement nuls), alors

$$A\wedge B = P_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\cdots P_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}.$$

5 Irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$

Propriété 21 : Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

6 Irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$

Propriété 22 : Racine complexe de polynôme réel

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. alors si $\alpha\in\mathbb{C}$ est racine de P, $\overline{\alpha}$ l'est aussi, de même ordre.

Propriété 23 : Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (à discriminant strictement négatif).

7 PPCM (Complément)

Définition 13 : PPCM

Le PPCM de deux polynômes A, B non nuls est l'unique générateur unitaire $A \vee B$ de l'idéal $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ des multiples communs à A et à B.

On a donc $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X]$.

On peut poser $0 \vee 0 = 0$.

Propriété 24 : du PPCM

(i) *Il s'agit du plus petit multiple unitaire commun à A et à B au sens de la division.*

(ii) *Si $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ et $B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}$ décompositions en irréductibles (avec exposant éventuellement nuls), alors $A \vee B = P_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdots P_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$.*

(iii) *On a toujours que AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés (donc égaux à normalisation près).*

V DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

1 Partie entière

Définition – Propriété 1 : Partie entière

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

On note $\mathbb{K}^-(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F < 0\}$.

Il existe un unique couple $(Q, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^-(X)$ tel que $F = Q + G$. Q est appelé **partie entière** de F.

2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème 9 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pôles de F d'ordre $m_1, \ldots, m_n$:

$$F = \frac{A}{\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

et $Q \in \mathbb{C}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe une unique famille $(\lambda_{k,j})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m_k}}$ de complexes telle que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X - \alpha_1} + \cdots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(X - \alpha_1)^{m_1}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_1} + \cdots + \underbrace{\frac{\lambda_{n,1}}{X - \alpha_n} + \cdots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(X - \alpha_n)^{m_n}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_n}$$

Propriété 25 : Partie polaire relative à un pôle simple

Si α pôle simple de $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\dfrac{\lambda}{X - \alpha}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ la partie polaire associée à α. Alors $F = \dfrac{A}{(X - \alpha)B_1}$ avec $B_1(\alpha) \neq 0$ et

$$\lambda = [\widetilde{(X - \alpha)F}](\alpha) = \frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Propriété 26 : Partie polaire relative à un pôle d'ordre $\geqslant 2$

Si α pôle d'ordre $m \geqslant 2$ de $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible,

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X - \alpha)^m B_1} = \frac{\lambda_1}{X - \alpha} + \cdots + \frac{\lambda_m}{(X - \alpha)^m} + G$$

où $B_1(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas pôle de G.

Alors $\lambda_m = [\widetilde{(X - \alpha)^m F}](\alpha) = \dfrac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}$ et $F - \dfrac{\lambda_m}{(X - \alpha)^m}$ admet α comme pôle d'ordre au plus $m - 1$ ce qui permet de réitérer le processus.

Méthode 2 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$

Les deux propriétés précédentes permettent de trouver les cœfficients de la décomposition.

Lorsqu'il reste peu de cœfficients à calculer, on peut aussi essayer d'évaluer la fraction rationnelle en des points bien choisis ou utiliser des méthodes d'analyse réelle (limite en ∞ de $x^m F(x)$...)

Penser à exploiter la parité avec l'unicité des cœfficients !

3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 10 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, avec la décomposition de B en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}$: $F = \dfrac{A}{\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}\prod_{i=1}^{r}\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{n_i}}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe d'uniques familles $\left(\lambda_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m_k}}$, $\left(\mu_{i,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ et $\left(\nu_{i,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ de réels tels que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \sum_{k=1}^{p}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m_k}\overbrace{\frac{\lambda_{k,j}}{(X-x_k)^j}}^{\substack{\text{élément simple}\\ \text{de 1}^{\text{e}}\text{ espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à } x_k}$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n_i}\overbrace{\frac{\mu_{i,\ell}X+\nu_{i,\ell}}{\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{\ell}}}^{\substack{\text{élément simple}\\ \text{de 2}^{\text{e}}\text{ espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à } X^2+p_iX+q_i}.$$

Méthode 3 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

Les méthodes vues dans $\mathbb{C}$ s'appliquent pour les pôles réels. Pour les μ et ν, on peut appliquer la méthode « du cache » en α racine complexe de X^2+pX+q.

On peut aussi décomposer dans $\mathbb{C}$ et rassembler les pôles complexes non réels et leur conjugué. L'écriture $F=\overline{F}$ et l'unicité des cœfficients donne des relations entre ceux-ci (comme avec la parité).

4 Décomposition en éléments simples de P'/P

Propriété 27 : Décomposition en éléments simples de P'/P

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ **scindé**, $P = \lambda\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}$. Alors la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est donnée par*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p}\frac{m_k}{X-x_k}.$$

*Variante : si $P = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X-y_k)$ où les y_k sont les racines **comptées avec multiplicité**, alors*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-y_k}.$$