

Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

Séparation Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$.

Homogénéité Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité)

Pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Propriété 1 : d'une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

- (i) $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$
- (ii) $\|-x\| = \|x\|$
- (iii) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

Définition 3 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$d : \begin{array}{ll} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{array}$$

Propriété 2 : d'une distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (ii) **Symétrie** : $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) **Double inégalité triangulaire** :
 $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 4 : distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E , $x \in E$.

On appelle **distance de x à A** le réel $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ qui est bien défini.

Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie

$\begin{array}{ll} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne sur E dans le sens où

$$\forall x, y \in E, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

C'est en particulier le cas de $x \mapsto d(x, a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 5 : Norme euclidienne

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur x de E , on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Propriété 4 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E .

3 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition 6 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k|; \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}; \\ \|x\|_\infty &= \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|. \end{aligned}$$

**Propriété 5 : Ce sont des normes**

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

b

Sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathbb{K})$

Propriété 6 : $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, encore noté $L^\infty(X, \mathbb{K})$ (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 7 : Norme infini

On définit, pour $f \in E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Propriété 7 : Rappel

Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Propriété 8 : La norme infini en est une

N_∞ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

c

Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Définition 8 : Normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

On définit, pour $f \in E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 = N_1(f) = \int_a^b |f| \, dx;$$

$$\|f\|_2 = N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2};$$

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Propriété 9 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

4**Boules et sphères**

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 9 : Boule et sphères

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}.$$

Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$\overline{B}(a, r) = B'(a, r) = B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

Sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}.$$

Définition 10 : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in A$.

Propriété 10 : Convexité des boules

Les boules sont convexes.

5**Parties, suites et fonctions bornées****Définition 11 : Partie bornée**

$A \in \mathcal{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$, i.e. $A \subset \overline{B}(0_E, M)$.

Propriété 11 : Les boules sont bornées

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Définition 12 : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f \in E^X$.

On dit que f est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$ (ie si $f(X) = \text{Im } f$ est une partie bornée de E .)

On note $L^\infty(X, E) = \mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées (notations hors-programme).

Propriété 12 : Norme infini

On pose, pour $f \in \mathcal{B}(X, E)$, le réel bien défini

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Alors $(\mathcal{B}(X, E), N_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$:

Définition 13 : Suite bornée

Soit $u \in E^\mathbb{N}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$ (ie si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E .)

On note $\ell^\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E (notations hors-programme).

6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété 13

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$,

$$N(x) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k).$$

Alors N est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$ appelée **norme produit**.

II SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition 14 : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ .

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \rightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.

Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Définition 15 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.

Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne** : $\int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne**

quadratique : $\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** : $\sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (convergence graphique).

Propriété 14 : Unicité de la limite

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Propriété 15 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.

Propriété 16 : Convergence de la norme des termes

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \rightarrow \|\ell\|$.

Propriété 17 : Convergence par majoration

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Définition 16 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de u .

Propriété 18 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

2 Opérations algébriques

Propriété 19 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \rightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété 20 : Produit externe de suites convergentes

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \rightarrow \alpha \ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété 21 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \dots \times E_p$, $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$. Alors

$$u \xrightarrow{N} \ell \text{ si et seulement si } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k.$$



COMPARAISON DE NORMES

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E .

1 Domination

Définition 17 : Domination

On dit que N_1 est **dominée par** N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$.

Propriété 22 : Implication de convergences

Soit N_1 dominée par N_2 et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.



Méthode 1 : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que

- $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$
- ou alors telle que $N_2(u_n) \rightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$
- ou encore tel que $\frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \rightarrow +\infty$.

2 Équivalence

a Définition

Définition 18 : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$.

Propriété 23 : Équivalence de convergence

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{K}^n$

Propriété 24 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

c Cas de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Propriété 25 : Domination des normes

Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$,

- $N_1 \leq (b-a)N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_1 .
- $N_2 \leq \sqrt{b-a}N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_2 .
- $N_1 \leq \sqrt{b-a}N_2$ et N_2 n'est pas dominée par N_1 .

d Cas de la dimension finie

Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

Non exigible, admis provisoirement.

Propriété 26 : Convergence coordonnée à coordonnée

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV SÉRIES VECTORIELLES

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

1 Généralités

Définition 19 : Vocabulaire des séries vectorielles

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \in E.$$

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Propriété 27 : Série télescopique vectorielle

Soit $(v_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

Propriété 28 : Espace vectoriel des termes généraux de séries vectorielles convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété 29 : Convergences des séries coordonnées

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^p u_n^{(k)} e_k$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge. Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right) e_k.$$

Propriété 30 : Divergence grossière

Si $u_n \not\rightarrow 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.

⚠ La réciproque est fausse !

Si $u_n \rightarrow 0_E$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.

2 Reste d'une série convergente**Définition 20 : Reste d'une série vectorielle convergente**

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 31 : Expression du reste

Avec les mêmes hypothèses,

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \text{ et } R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E.$$
3 Convergence absolue**Définition 21 : Absolue convergente d'une série vectorielle**

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème 2 : En dimension finie, convergence absolue $\Rightarrow$ convergence

Si E est **de dimension finie** et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fausse.

Propriété 32 : Inégalité triangulaire vectorielle

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

4 Somme des relations comparaison

Si les sommations de relations de comparaison dans le programme officiel n'apparaissent que pour les séries numériques, elles s'étendent aisément au cas vectoriel en remplaçant dans les démonstrations les valeurs absolues par des normes.

Deux remarques :

- La série de référence est toujours à termes réels positifs.
- Rappel : pour les relations de comparaison vectorielles, il suffit de rajouter des normes de partout...

Théorème 3 : Somme des relations comparaison dans le cas de divergence

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

- (i) Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(\Sigma_n)$.
- (ii) Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n = O(\Sigma_n)$.

**Théorème 4 : Sommation des relations comparaison dans le cas de convergence**

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

$$\text{et } \rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = o(\rho_n)$.

Propriété 35 : Cas des boules ouvertes

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Propriété 36 : des ouverts

- (i) $\emptyset, E$ sont ouverts.
- (ii) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.
- (iii) Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.
- (iv) Un produit **fini** d'ouverts est ouvert (pour la norme produit).

Propriété 37 : Ouverts et domination de normes

Si N_1 est une norme dominée par N_2 , alors les ouverts pour N_1 sont des ouverts pour N_2 .

Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

V**TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS**

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

1**Voisinages, ouverts, fermés****a****Voisinage****Définition 22 : Voisinage**

Soient $a \in E$ et V une partie de E .

On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans V .

Propriété 33 : des voisinages

- (i) Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors W est un voisinage de a .
- (ii) Une réunion non vide quelconque de voisinages de a est un voisinage de a .
- (iii) Une intersection **finie** de voisinages de a est un voisinage de a .

Propriété 34 : Voisinages et domination de norme

Si N_1 est une norme dominée par N_2 , alors les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2 .

Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

b**Parties ouvertes****Définition 23 : Ouvert**

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tous ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(a, r) \subset \mathcal{O}$.

Par convention, $\emptyset$ est ouvert.

c**Parties fermées****Définition 24 : Fermé**

Une partie F de E est dite **fermée** lorsque son complémentaire F^c est ouvert.

Propriété 38 : Cas des boules fermées

Toute boule fermée est fermée (!)

Propriété 39 : des fermés

- (i) $\emptyset, E$ sont fermés.
- (ii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.
- (iii) Une réunion **finie** de fermés est fermée.
- (iv) Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).

Propriété 40 : Cas des sphères

Toute sphère de E est fermée.

Propriété 41 : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F .

2 Adhérence, densité, intérieur

a Points adhérents, adhérence

Définition 25 : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est **adhérent** à A lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Propriété 42 : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x .

Définition 26 : Adhérence

L'**adhérence** $\bar{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A .

Propriété 43 : Croissance

Si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Propriété 44 : Caractérisation

$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

Propriété 45 : Caractérisation des fermés

F est un fermé de E si et seulement si $\bar{F} = F$.

Propriété 46 : Cas des sous-espaces et des convexes (HP)

Si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\bar{A}$ l'est aussi.

Si A est un convexe de E , alors $\bar{A}$ l'est aussi.

b Densité

Définition 27 : Densité

D est **dense** dans E lorsque $\bar{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre D .

Propriété 47 : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de D .

c Intérieur

Définition 28 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E , $x \in E$.

x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x , c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A .

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A , noté $\mathring{A}$.

Propriété 48 : Croissance

Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Propriété 49 : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A .

Propriété 50 : Caractérisation des ouverts

$\mathcal{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathcal{O} = \mathring{\mathcal{O}}$.

Propriété 51 : Adhérence, intérieur et complémentaire

Si A est une partie de E , $(\mathring{A})^c = \bar{A}^c$ et $\bar{A}^c = \mathring{A}^c$.

d Frontière

Définition 29 : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Propriété 52 : Caractère fermé

Une frontière est toujours fermée.

3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E .

a Voisinage relatif

Définition 30 : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de a dans A** toute partie V' de A s'écrivant $V' = A \cap V$ où V est un voisinage de a , c'est-à-dire telle qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \subset V'$.

**b****Ouverts relatifs****Définition 31 : Ouvert relatif**

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de A** (ou **pour la topologie induite sur A**) lorsqu'elle est un voisinage relatif de chacun de ses points.

Propriété 53 : Caractérisation

$\mathcal{O}'$ de A est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

c**Fermés relatifs****Définition 32 : Fermé relatif**

Une partie F' de A est un fermé **relatif de A** si son complémentaire **dans A** est un ouvert relatif de A .

Propriété 54 : Caractérisation

F' est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe un fermé F tel que $F' = F \cap A$.

Propriété 55 : Caractérisation séquentielle

Soit F' une partie de A .
 F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant **dans A** a sa limite dans F' .

d**Densité****Définition 33 : Densité dans une partie**

Soit B partie de A . B est **dense dans A** si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B .