

Suites et séries de fonctions (1^{re} partie)

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A , alors u est continue en a . En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A .	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A , et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n , u_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.



Table des matières

5 Suites et séries de fonctions (1^{re} partie)	1
I Convergences simple et uniforme	2
1 Convergence simple	2
2 Convergence uniforme	3
a Définition	3
b Norme infini	4
c Lien avec la convergence uniforme	5
3 Convergence uniforme locale	6
II Continuité et limite	7
1 Continuité	7
2 Théorème de la double limite	8
III Approximations uniformes	9
1 Par des polynômes	9
2 Par des fonctions en escalier	10
IV Séries de fonctions	11
1 Convergence simple	11
2 Convergence uniforme	12
3 Convergence normale	13
4 Continuité	15
5 Double limite	15
6 Grand classique incontournable (mais HP)	17

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

1 CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers f** lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.
On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$.

Remarque

R1 – C'est-à-dire $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. $N_{x,\varepsilon}$ dépend à la fois de x et de ε .

R2 – Écrire $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f(x)$ n'a absolument aucun sens.

R3 – Certaines propriétés telles que la parité, la monotonie, la périodicité peuvent se transmettre par convergence

simple (en passant à la limite dans l'identité traduisant cette propriété.)

Exemple

E1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{n+x}{1+nx}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

On remarque que les f_n sont bornées mais pas f .

E2 – $g_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ converge simplement vers $g = \mathbb{1}_{\{1\}}$.

On remarque que les g_n sont continues mais pas g .

E3 – On considère pour $n \geq 2$, h_n affine par morceaux telle que $h_n(0) = 0$, $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$ et $h_n(x) = 0$ si $\frac{2}{n} \leq x \leq 1$.

La courbe a une forme de triangle afin de remarquer que $\int_0^1 h_n(t) dt = 1$.

Alors $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} 0$ et on remarque que $\int_0^1 h_n(t) dt \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 0 dt = 0$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x . Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$.

Remarque

R4 – Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

La différence avec la convergence simple est que cette fois, le rang ne dépend que de ε , plus de x .

Propriété 1 : CU $\Rightarrow$ CS

La convergence uniforme vers une fonction f implique la convergence simple vers cette fonction.

Démonstration

Si on a un N qui convient pour tous les x , alors pour tout x , on a un N qui convient. ■

**Propriété 2 : CU par majoration uniforme**

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

H1 $\alpha_n \rightarrow 0$

H2 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ (majoration **uniforme**, c'est-à-dire que α_n ne dépend pas de $x \in X$),

alors

C1 (f_n) converge uniformément vers f .

Remarque

R5 – Il suffit d'avoir la majoration uniforme à partir d'un certain rang seulement pour pouvoir conclure.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \leq \varepsilon$, ce qui conclut. ■

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1 les f_n sont bornées

H2 elles convergent uniformément vers f

alors

C1 f est bornée.

Démonstration

Avec $\varepsilon = 1$, on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall x \in X$, $|f(x)| - |f_N(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| \leq 1$.
En particulier, pour tout $x \in X$, $|f(x)| \leq |f_N(x)| + 1$. ■

b**Norme infini****Définition 3 : Norme**

On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

Séparation : Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Propriété 4 : Utilisable directement

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Démonstration

On a déjà que $\lambda \sup(A)$ majore λA et on peut trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow \sup A$. Alors $\lambda a_n \in \lambda A \rightarrow \lambda \sup A$ ce qui permet de conclure. ■

Définition 4 : Norme infini

On définit, pour $f \in E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$,

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Propriété 5 : La norme infini est une norme

Il s'agit d'une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Démonstration

Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, $|f|$ est majorée donc $N_\infty(f)$ est bien définie et positive.

Séparation : On a bien $N_\infty(f) \geq 0$ et si $N_\infty(f) = 0$ alors pour tout $x \in X$, $0 \leq |f(x)| \leq N_\infty(f) = 0$ donc $f = \tilde{0}$.

Homogénéité : Pour tout $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$ avec la propriété précédente (et $|\lambda| \geq 0$).

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour toutes $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, et tout $x \in X$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

ce qui donne un majorant de $|f + g|$ et permet de conclure $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$. ■

Remarque

R6 – La preuve est à savoir faire.

**Lien avec la convergence uniforme****Propriété 6 : CU et norme infini**

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$ si et seulement si à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $N_\infty(f_n - f) \rightarrow 0$.

Remarque

R7 – Mais rien n'indique que les f_n soient bornées a priori.

Exemple

E4 – $f_n : x \mapsto e^x + \frac{1}{n}$ converge uniformément vers $\exp$ et aucune de ces fonctions n'est bornée.

Démonstration

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f . Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ donc, à partir de ce rang, $f_n - f$ est bornée et $N_\infty(f_n - f) \leq \varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Dans le sens réciproque, c'est une application de la propriété précédente avec $\alpha_n = N_\infty(f_n - f)$. ■

**Propriété 7 : Cas des fonctions bornées**

Si les fonctions $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f \iff N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Démonstration

C'est bien la même définition, les $f_n - f$ étant bien bornées. ■

Propriété 8 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$, alors la convergence de (f_n) n'est pas uniforme.

Démonstration

Par contraposée : si la convergence est uniforme, alors les $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang, et $N_\infty(f_n - f) \rightarrow 0$. Or $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq N_\infty(f_n - f)$, donc $f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$.

Ou bien, directement, si $\varepsilon > 0$, on a un rang N à partir duquel pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour $x = x_n$, on obtient $\forall n \geq N$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve bien que $f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$. ■

**Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$**

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Si on arrive à prouver que les $f_n - f$ sont bornées au moins à partir d'un certain rang et à calculer $N_\infty(f_n - f)$ (par exemple en étudiant les variations), on peut conclure à vérifier si $N_\infty(f_n - f) \rightarrow 0$ ou non.
- Sinon,
 - ★ pour prouver qu'il y a convergence uniforme, on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \rightarrow 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.
 - ★ pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
 - Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f . On verra des variantes plus loin avec la continuité ou les limites.
 - Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$.

Exemple : On reprend les mêmes exemples

E5 – Pour le premier, il n'y a pas convergence uniforme car f n'est pas bornée alors que les f_n le sont.

E6 – $g_n : x \mapsto x^n$. Alors $N_\infty(g_n - g) = 1$ ou bien $g_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - g\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow e^{-1} \neq 0$. Il n'y a pas convergence uniforme.

E7 – $h_n\left(\frac{1}{n}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) = n \not\rightarrow 0$.

Exercice 1 : CCINP 11**3****Convergence uniforme locale**

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in \overline{X}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X , elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X , mais, malheureusement, la réciproque est fautive.

Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $+\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap [a, +\infty[$.

De même, lorsque X n'est pas minoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $-\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $-\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $b > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]-\infty, b]$.

Propriété 9 : CU sur tout segment $\Rightarrow$ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X , alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X .

Démonstration

On peut toujours inclure un voisinage $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ de $x_0 \in X$ dans un segment quitte à réduire η . ■

Remarque

R8 – La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X , ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X .

De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

R9 – À noter aussi qu'on ne prouve pas une convergence uniforme en découpant X : c'est une convergence globale qui ne peut s'obtenir en réunissant des convergences uniforme sur des parties de X , contrairement à la convergence simple qui, elle, est ponctuelle.

Exemple

E8 – $g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0, 1[$, mais pas sur $[0, 1[$ comme déjà vu.

II CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 Pour tout n , f_n est continue en x_0 .

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 .

Alors

C1 f est continue en x_0 .

Démonstration

Soit $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[= V$.

Alors, si $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f au voisinage de x_0 fournit un rang N à partir duquel, pour tout $x \in V$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. C'est donc le cas pour $x = x_0$.

En prenant $n = N$, la continuité de f_N , fournit un $\delta > 0$ tel que sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi, si $|x - x_0| \leq \min(\eta, \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.



Cela prouve bien que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$.

Corollaire 1 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 Pour tout n , f_n est continue sur I .

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).

Alors

C1 f est continue sur I .



Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f .

Exemple

E9 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : CCINP 9, 12

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a .

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$

C2 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Remarque

R 10 – Lorsque a est une borne ouverte de I , une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !
(Mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a .)

Démonstration : Hors programme

On traite le cas où a est fini.

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème

précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$.

On suppose dorénavant que $n \geq N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leq 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leq 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a , elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a .

On obtient donc, pour $n \geq N$, $|b_n| \leq 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \rightarrow b$.

On montre alors que $b_n \rightarrow b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| + |f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}| + |b_{\varphi(n)} - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N , $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a alors aussi $|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W'_n et W''_n de a sur lesquels $|b_n - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ et $|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $|b_{\varphi(n)} - b| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geq \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W'_n \cap W''_n$, alors tire $|b_n - b| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \rightarrow b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \rightarrow b$), qui est aussi continue a , donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$. ■



Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent.

Exemple

E 10 – $g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$: le résultat ne tient pas malgré la convergence uniforme sur tout segment, et on retrouve l'absence de convergence uniforme sur $[0, 1]$.



APPROXIMATIONS UNIFORMES

1 Par des polynômes

Théorème 3 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

- Toute fonction continue **sur un segment** à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
- Soit f continue **sur le segment** $[a, b]$. Il existe une suite fonction $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $N_\infty(p_n - f) \rightarrow 0$.
- Soit f continue **sur le segment** $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $N_\infty(p - f) \leq \varepsilon$.

**Démonstration**

Non exigible. Preuve classique par les polynômes de Bernstein en TD *.

Remarque

R 11 – Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

Exercice 3

Montrer que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante, puis qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

Solution : En effet, commençons par remarquer qu'il suffit de prendre une borne infinie que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante.

On confond le polynôme et la fonction polynomiale associée.

Supposons alors qu'une fonction f est limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur un intervalle non borné I . On a un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $P_n - f$ est bornée. Mais alors, si $n \geq N$, $P_n - P_N = (P_n - f) + (f - P_N)$ est bornée sur I qui ne l'est pas et polynomiale, donc est constante.

On a donc $c_n \in \mathbb{K}$ tel que $P_n = P_N + c_n = P_N - P_N(a) + P_n(a)$ où a est un point quelconque de I .

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout $x \in I$, $f(x) = P_N(x) - P_N(a) + f(a)$ donc f est une fonction polynomiale.

2**Par des fonctions en escalier****Théorème 4 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier**

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Remarque

R 12 – On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ en escalier telle que $N_\infty(\varphi - f) \leq \varepsilon$.

Alors, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on obtient φ_n en escalier telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f .

Démonstration

Cas continu Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ de pas $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \eta$.

On définit alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, on a k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$ et $|x - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| \leq \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon$, soit $x = b$ et $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a donc bien $N_\infty(f - \varphi) \leq \varepsilon$.

Cas continu par morceaux Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ adaptée à f .

Chaque $f|_{[a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$: on a $\varphi_k \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que $N_\infty(f_k - \varphi_k) \leq \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$ soit on a k tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a donc bien $N_\infty(f - \varphi) \leq \varepsilon$.

IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 5 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge. Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque

R 13 –  f désigne ici la somme de la **série de fonctions** $\sum f_n$ et non la limite simple de la **suite de fonctions** (f_n) .

R 14 – Ainsi, la **série** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

R 15 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fausse.

R 16 – La somme d'une série de fonction (et le reste si elle converge simplement) sont des fonctions.

Exemple : Étudier la convergence simple de $\sum f_n$

E 11 – $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$

E 12 – $f_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{1 + n^2 x^2}$

E 13 – $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$

Lorsque cela a un sens, on appelle **fonction ζ de Riemann** la fonction

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$



2 Convergence uniforme

Définition 6 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X , c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ tel que

- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur X ,
- $N_\infty(S_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque

R 17 – On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonction comme convergence uniforme locale de (S_n) .

Propriété 10 : CU $\Rightarrow$ CS

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f , alors elle converge simplement vers f .

Propriété 11 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1 $\alpha_n \rightarrow 0$

H2 $\forall x \in X, |S_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ au moins à partir d'un certain rang

alors

C1 $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f .

Démonstration

Héritée des suites de fonctions.

Propriété 12 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X , R_n le reste d'ordre n .

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition.

Exercice 4 : CCINP 8

Propriété 13 : Condition nécessaire de CU

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X , alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X , c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $N_\infty(f_n) \rightarrow 0$.

Démonstration

$(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 donc $(f_n) = (R_n - R_{n-1})_n$ aussi car, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x)| \leq N_\infty(R_n - R_{n-1}) \leq N_\infty(R_n) + N_\infty(R_{n-1}) \rightarrow 0$$

avec une majoration indépendante de x . ■

**Méthode 4 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément**

On peut rechercher $(x_n) \in X^\mathbb{N}$ telle que $f_n(x_n) \not\rightarrow 0$.

Exercice 5 : CCINP 17**Méthode 5 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions**

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f . Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

E 14 – Fonction ζ sur $]1, +\infty[$: On trouve $0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ par comparaison à une intégrale.
On en déduit la convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 1$.

3 Convergence normale

Définition 7 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

**Propriété 14 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue**

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X ,

- pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument,
- $\sum f_n$ converge uniformément.

Démonstration

- Pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq N_\infty(f_n)$ et on conclut par comparaison de termes généraux positifs dans le cas de convergence.
- $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} N_\infty(f_k)$ qui ne dépend pas de x et tend vers 0, ce qui donne bien la convergence uniforme de la série de fonctions.

Remarque

R 18 – On a le diagramme



Les réciproques sont fausses.

R 19 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemple

E 15 – Pour la fonction ζ , il n'y a pas convergence normale sur $]1, +\infty[$, mais sur tout $[a, +\infty[$.
On retrouve la convergence uniforme.

E 16 – $\sum n^\alpha x e^{-n^2 x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$.
Sinon, convergence normale sur $[a, +\infty[$.

**Méthode 6 : Convergence normale par domination**

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X , on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple

E 17 – $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété 15 : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X .

Exemple

E 18 – $f_n(x) = xe^{-n^2 x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 : CCINP 15**4 Continuité****Théorème 5 : Transfert de continuité**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 Pour tout n , f_n est continue sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Exemple

E 19 – ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

5 Double limite**Théorème 6 : de la double limite**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a .

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

Alors

C1 $\sum b_n$ converge.

C2 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_k(x).$$

Remarque

R 20 –  Lorsque a est une borne ouverte de I , une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !

**Exemple**

Ex 20 – ζ en $+\infty$ tend vers 1.

Exercice 7

On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8 : CCINP 53**Exercice 9 : Contre-exemple en 0 sur tout segment**

Soit $f_n : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Étudier la convergence simple puis calculer la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Que penser de la double-limite en 0^+ ?

**Méthode 7 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...**

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a .

Exercice 10 : CCINP 18 (modifié)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
(b) Sur quel type d'intervalle y a-t-il convergence normale ? Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$.
(c) La fonction S est-elle continue sur D ?

Solution :

1. Si $|x| < 1$, il y a convergence absolue car $\frac{|x|^n}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Si $|x| > 1$, il y a divergence grossière car $\frac{|x|^n}{n} \rightarrow +\infty$.

Si $x = -1$, la série harmonique diverge, si $x = 1$, la série harmonique alternée converge (par exemple par le TSSA).

Finalement, la série de fonctions converge simplement sur $D =]-1, 1]$.

2. (a) $N_{\infty, [-1, 1]}(u_n) = \frac{1}{n}$ donc il n'y a pas de convergence normale sur $D =]-1, 1[$.

Comme $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{1}{n}$ qui est un terme général de série divergente, le théorème de la double limite ne s'applique pas et donc il n'y a pas de convergence uniforme sur $D =]-1, 1[$.

- (b) Par contre, sur tout intervalle de la forme $] -a, a[$ où $0 < a < 1$, $N_{\infty, [-1, 1]}(u_n) = \frac{a^n}{n} = |u_n(a)|$ qui est un terme général de série convergente, donc il y a convergence normale sur $[-a, a]$.

On a donc aussi convergence uniforme sur ce type d'intervalle.

Reste à savoir s'il y a convergence uniforme au voisinage de 1.

Or, le théorème spécial s'appliquant pour $x \in [0, 1]$, la majoration du reste donne

$$\forall x \in [0, 1], |R_{n+1}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

qui ne dépend pas de x et tend vers 0.

Il y a donc bien convergence uniforme sur $[0, 1]$.

- (c) Comme

H1 les u_n sont toutes continues sur $] -1, 1[$ et comme, d'après la question précédente,

H2 $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de $D =]-1, 1[$,

S est continue sur D .

6 Grand classique incontournable (mais HP)

Exercice 11 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ .
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent de ζ en 1 par comparaison série-intégrale.
7. Tracer le graphe de ζ .
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

1. $]1, +\infty[$

2. $[a, +\infty[$ où $a > 1$.

3. ζ est décroissante par passage à la limite car toutes les f_n le sont, donc les sommes partielles le sont aussi.

4. 1 par double limite.

5. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.

2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme ζ est décroissante, elle a une limite ℓ finie ou $+\infty$ en 1.

Or on a $\ell \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, donc $\ell \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \rightarrow +\infty$. Ainsi $\ell = +\infty$.

Ou encore $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq A$ à partir d'un rang N .

Pour $n = N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V , $\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^x} \geq A$. Donc ζ tend vers $+\infty$ en 1.



6. On trouve $\zeta \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

7. ζ est décroissante avec une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

8. CS sur $\mathbb{R}_*^+$ par TSSA.

CN sur $[a, +\infty[$, $a > 1$.

CU sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ par majoration du reste TSSA.

9. Simplifier $\eta(x) + \zeta(x)$.