

Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES (MP2I)

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition 1 : Série, convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}.$$

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Remarque

R1 – Enlever un nombre fini de termes à S_n ne change pas sa convergence.

Autrement dit, si I est fini, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} u_n$ sont de même nature. Lors-

qu'elles sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n =$

R2 – Une série peut n'être définie que pour $n \geq n_0$, et on note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série dans ce cas.

R3 – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc.

Cependant, en général, c'est en étudiant **son terme général** u_n (et non les sommes partielles) qu'on déduit des propriétés de la série.

R4 – Ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui n'est pas une somme !) et le **nombre** (lorsqu'il existe) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$ (qui s'appelle somme de la série et qui n'est pas une somme ! C'est une limite...)

Propriété 1 : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si

Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n =$

Corollaire 1

Lorsque $|q| < 1$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n =$

Exemple : Série harmonique alternée

E1 – $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente de somme $\ln 2$.

**Propriété 2 : Série exponentielle complexe**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z =$

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n , c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1} = 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$$

Inversement, une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général u_n ?

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + u_1 \\ v_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = \\ u_1 = \\ u_2 = \\ \vdots \\ u_n = \end{cases}$$

Propriété 3 : Série télescopique

Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum (v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1} = 0$) appelée **série télescopique**.

Corollaire 2

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) =$$

Exercice 1 : Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de la somme.

Exercice 2 : Nature de $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Remarque

R5 – Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série.

Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

3 Espace vectoriel des termes généraux de séries convergentes**Propriété 4 : Combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes**

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) =$$

Remarque

R6 – Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$

R7 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors

R8 – Si $\sum v_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum (\lambda v_n)$ diverge si et seulement si

Propriété 5 : Convergence des séries à termes complexes

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes, elle converge si et seulement si les séries $\sum \Re u_n$ et $\sum \Im u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n =$$

Remarque

R9 – Lorsqu'il y a convergence,

$$\Re \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) \quad \text{et} \quad \Im \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n).$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété 6 : Divergence grossière

Si $u_n \not\rightarrow 0$, alors $\sum u_n$ diverge.
On parle de **divergence grossière**.

 La réciproque est fausse !

Si $u_n \rightarrow 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.

5 Reste d'une série convergente

Définition 2 : Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 7 : Reste sous forme de limite

Avec les mêmes hypothèses,

Exemple : Série géométrique

E2 –

Propriété 8 : Le reste converge vers 0

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n , alors

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



6 Un critère simple pour des séries à termes positifs

Propriété 9 : Convergence d'une série à termes positifs

Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Alors

- (i) (S_n) est
- (ii) (S_n) a
- (iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si



Méthode 1 : Manipulation de sommes de séries dans $[0, +\infty]$

Finalement, dans le cas d'une série à termes positifs, on peut toujours poser

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in [0, +\infty].$$

Le programme autorise alors la manipulation algébrique dans $[0, +\infty]$ de sommes de séries à termes positifs même divergentes (dans ce cas la somme vaut $+\infty$) pourvu qu'on ne manipule que des nombres positifs ou $+\infty$ (pas de différences, par exemple).

Alors obtenir une somme finie équivaut à la convergence de la série : pratique !

Ce principe est généralisé dans le chapitre sur la sommabilité.

7 Séries alternées

Théorème 1 : Spécial sur certaines Séries Alternées (TSSA) – Critère de Leibniz

Si $v = (v_n)_n$ est une suite **réelle** telle que

H1 v est à signes alternés c'est-à-dire

H2

H3

alors

De plus,

- La somme S a le même signe que
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n , R_n , a le même signe que son premier terme et vérifie

$$|R_n| \leq$$

Exemple

$$\text{E 3} - \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 3 : CCINP 8 : TSSA

Remarque

R 10 – La **transformation d'Abel** est l'équivalent discret (et hors-programme) de l'intégration par partie. Elle s'utilise pour obtenir des informations sur une

somme partielle de la forme $\sum_{k=0}^n u_k v_k$.

L'idée est d'interpréter l'un des termes comme la « dérivée discrète » de la somme partielle correspondante.

Si on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, alors $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n - (n-1)}$.

On écrit alors $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) v_k$ et on sépare la somme deux puis on réindexe la deuxième pour obtenir un terme en $\sum S_k (v_{k+1} - v_k)$.
On a, en quelque sorte, primitivé le terme u_k et dérivé le terme v_k .

II CONVERGENCE ABSOLUE, SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS (MP2I)

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum (-u_n)$ si le signe est négatif.

Théorème 2 : Comparaison des séries à termes réels positifs – cas de convergence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.

Si *et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$\blacksquare u_n = \mathcal{O}(v_n), \quad \blacksquare u_n = o(v_n),$$

$$\blacksquare \text{apcr } u_n \leq v_n, \quad \blacksquare u_n \sim v_n$$

alors

Corollaire 3 : Comparaison des séries à termes positifs – cas de divergence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.

Si *et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$\blacksquare u_n = \mathcal{O}(v_n), \quad \blacksquare u_n = o(v_n),$$

$$\blacksquare \text{apcr } u_n \leq v_n, \quad \blacksquare u_n \sim v_n$$

alors

Exemple

$$\text{E4} - \sum \frac{1}{n^{2n}}$$

$$\text{E5} - \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\text{E6} - \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Propriété 10 : Cas de l'équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs** telles que $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque

R11 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum u_n$ converge, on ne peut rien dire de $\sum v_n$ en général.

Exemple

$$\text{E7} - \frac{1}{n^2} = \mathcal{O}(1), \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge mais } \sum 1 \text{ diverge.}$$

R12 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

**Exemple**

E 8 – $\sum \frac{1}{n}$

E 9 – $\sum \sin \frac{1}{n^2}, \sum \sin \frac{1}{n^3}, \sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$

2 Convergence absolue

Définition 3 : Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque la série à termes réels positifs converge.

Théorème 3 : convergence absolue $\Rightarrow$ convergence

*Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.
La réciproque est fausse.*

Remarque

R 13 – Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

**Méthode 2 : Utilisation de la comparaison pour des séries quelconques**

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = o(v_n)$ ou que $|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $|u_n| = o(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leq v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

Exercice 4 : CCINP 46 : Étude d'une série semi-convergente par développement asymptotique

3 Critère de d'Alembert (MPI)

Propriété 12 : Critère de d'Alembert

Soit (u_n) suite à termes réels strictement positifs tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty].$$

- Si $\ell > 1$,
- Si $\ell < 1$,
- Si $\ell = 1$,

Exercice 5 : CCINP 6 : Critère de d'Alembert

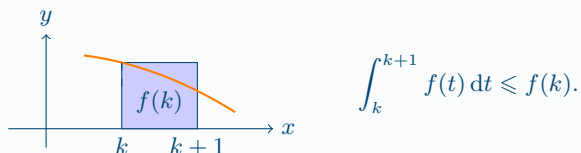
4 Comparaison série-intégrale

a Comparaison



Méthode 3 : Comparaison série-intégrale, cas décroissant

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et continue par morceaux. On observe, pour $k \in \mathbb{N}$, en comparant les aires,



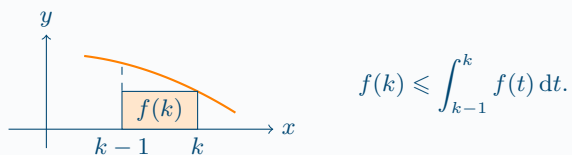
On peut alors ou bien sommer de 0 à n et obtenir

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k)$$

ou bien sommer de 0 à $n-1$ et rajouter $f(n)$ pour obtenir

$$\int_0^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k).$$

De même, pour $k \in \mathbb{N}$,



On peut alors sommer de 1 à n et rajouter $f(0)$ pour obtenir

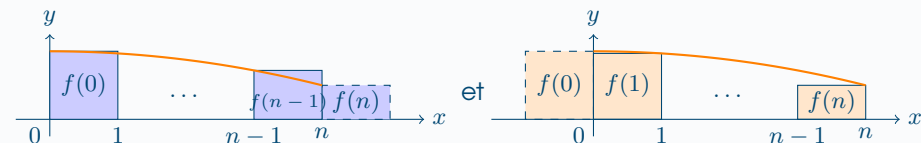
$$\sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt.$$

Si $0 < p \leq n$ on peut aussi sommer de p à n pour obtenir

$$\sum_{k=p}^n f(k) \leq \int_{p-1}^n f(t) dt$$

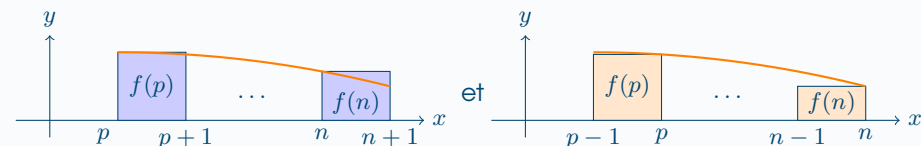
(il faut faire attention dans ce cas à ce que l'intégrale soit bien définie.)

En résumé,



$$\text{donnent } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

Et



$$\text{donnent } \int_p^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p}^n f(k) \leq \int_{p-1}^n f(t) dt$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

On peut aussi, suivant les besoins, mixer les deux en sortant un terme d'un côté et en modifiant les bornes de l'intégrale de l'autre.

Remarque

R 14 – Il est interdit d'apprendre ces formules par cœur. Le plus important est de savoir les retrouver sur un dessin et de refaire le calcul.

R 15 – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

Exercice 6 : Classique, jadis au programme... Écrits CCINP 2025!

1. Montrer que si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives, décroissante et si $\forall n \geq 1, w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$, alors $\sum w_n$ converge...

(a) ... par un argument géométrique, en interprétant w_n comme une aire.

(b) ... plus classiquement en utilisant un encadrement de w_n .



2. En déduire qu'il existe une constante γ (appelée constante d'Euler) telle que

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Ce développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique est ultra classique. On ne connaît pas grand-chose de cette constante. On ne sait pas dire si c'est un nombre rationnel ou non, par exemple.

3. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant une série télescopique.

Cette méthode est absolument à savoir faire.

4. Utiliser le développement asymptotique de H_n pour retrouver la valeur de la somme de la série harmonique alternée.

b

Lien avec l'intégrabilité

La comparaison série-intégrale permet de relier la nature de la série $\sum f(n)$ à l'intégrabilité de f dans le cas d'une fonction **continue par morceaux, à valeurs positives et décroissante**.

Exercice 7 : Classique, jadis au programme... Écrits CCINP 2025! (bis)

Soit f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives, décroissante. Montrer que

$$\sum f(n) \text{ converge} \iff f \text{ est intégrable en } +\infty$$

c

Séries de Riemann

Théorème 4 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff$$

Remarque

R 16 – On pose pour $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.

ζ est appelée fonction ζ de Riemann.



Méthode 4 : Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple

E 10 – $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$.

E 11 – $u_n = \frac{\text{Arctan } n}{\sqrt{n+1}}$

E 12 – $u_n = e^{-n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

E 13 – $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

E 14 – $u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8 : CCINP 7 : Équivalent et signe, nature de série

d**Séries de Bertrand (HP mais classique)****Méthode 5 : Séries de Bertrand**

Il s'agit des séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais **très classique**.

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que la série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

On peut par comparaison série-intégrale se ramener au critère de convergence des intégrales de Bertrand mais il faut également savoir le traiter directement.

- Cas de divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent) ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 0)$, on minore asymptotiquement le terme général.
- Si $\alpha > 1$, on applique une règle du $n^\gamma u_n$.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 9 : CCINP 5 : Cas particulier de série de Bertrand**e****Évaluation des sommes partielles et des restes**

La comparaison série-intégrale est un bon outil pour évaluer asymptotiquement les sommes partielles dans le cas de divergence et les restes dans le cas de convergence dans le cas d'une fonction **continue par morceaux et monotone**.

Aucun résultat théorique au programme, voyons-le sur quelques exemples.

Exemple : Cas de divergence

E 15 – Divergence et équivalent des sommes partielles de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$

E 16 – **Très classique**. Même question pour $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

E 17 – Équivalent de $\sum_{k=0}^n k^\alpha$ où $\alpha > 0$.

Remarque

R 17 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ diverge et $f(n) \rightarrow 0$, $S_n \sim F(n)$ où F primitive de f .

Exemple : Cas de convergence

E 18 – On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et on cherche une estimation asymptotique de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Remarque

R 18 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ converge de reste R_n , $I = \int_0^\infty f(t) dt$ et $I_n = \int_0^n f(t) dt$,

$$I - I_{n+1} \leq R_n \leq I - I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de R_n .



FORMULE DE STIRLING (MP2I)

Théorème 5 : Formule de Stirling

Corollaire 4 : Développement asymptotique de $\ln(n!)$

On en déduit un développement asymptotique de $\ln(n!)$.



SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON (MPI)

1 Cas de divergence

Théorème 6 : Sommation dans le cas de divergence

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S_n(v) = \sum_{k=0}^n v_k$. On suppose

H1 v une suite à valeurs **réelles positives**.

H2 $\sum v_n$ **diverge**.

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) Si

(ii) Si

(iii) Si

Remarque

R19 – C'est encore valable si $v_n \geq 0$ seulement à partir d'un certain rang. Cette hypothèse de positivité est capitale !

R20 –  Le sens de la comparaison diffère de celui du théorème classique de divergence par comparaison. De plus, rien n'impose à la série $\sum u_n$ de diverger dans les deux premiers cas. Elle peut très bien converger.

Exemple

E19 – Équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Théorème 7 : de Cesàro

Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{K}$ (éventuellement infinie) et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ alors $v_n \rightarrow \ell$.



Cas de convergence

Théorème 8 : Sommation dans le cas de convergence

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note, sous réserve d'existence, $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et

$R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. On suppose

H1 v une suite à valeurs **réelles positives**.

H2 $\sum v_n$ **diverge**.

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) Si

(ii) Si

(iii) Si

V COMPLÉMENT. DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL ILLIMITÉ

Un dernier résultat qui n'est plus dans le programme mais qu'il est bon de connaître d'une part pour la culture, et d'autre part pour la démonstration classique de l'indénombrabilité de $\mathbb{R}$ par argument diagonal de Cantor (hors-programme aussi, certes.)

Théorème 9 : [HP]

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0,a_1a_2\dots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n \geq 1} \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

Définition 4 : développement décimal illimité propre

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x .

Remarque

- R21** – Les seuls nombres réels à avoir deux développements décimaux illimités sont les nombres décimaux. Le développement illimité propre est celui se terminant par des 0, l'autre se termine par des 9.
- R22** – Bon à savoir et exercice pas inintéressant : les nombres rationnels sont exactement les réels à écriture décimale périodique à partir d'un certain rang.