

Séries numériques

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
Sommation des relations de comparaison : domination, négli-geabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).



Table des matières

4	Séries numériques	1
I	Généralités sur les séries (MP2I)	2
1	Sommes partielles, convergence, divergence, somme	2
2	Correspondance suite et séries	3
3	Espace vectoriel des termes généraux de séries convergentes	5
4	Condition nécessaire de convergence, divergence grossière	5
5	Reste d'une série convergente	6
6	Un critère simple pour des séries à termes positifs	7
7	Séries alternées	7
II	Convergence absolue, Séries à termes réels positifs (MP2I)	9
1	Comparaisons de termes généraux réels positifs	9
2	Convergence absolue	10
3	Critère de d'Alembert (MPI)	12
4	Comparaison série-intégrale	13
a	Comparaison	13
b	Lien avec l'intégrabilité	14
c	Séries de Riemann	14
d	Séries de Bertrand (HP mais classique)	15
e	Évaluation des sommes partielles et des restes	16
III	Formule de Stirling (MP2I)	17
IV	Sommation des relations de comparaison (MPI)	18
1	Cas de divergence	18
2	Cas de convergence	19
V	Complément. Développement décimal illimité	20

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES (MP2I)

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition 1 : Série, convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}.$$

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.
Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Remarque

R1 – Enlever un nombre fini de termes à S_n ne change pas sa convergence.

Autrement dit, si I est fini, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} u_n$ sont de même nature. En effet, si $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus I} u_k$

et si $n > \max I$, $S_n = \Sigma_n + \sum_{n \in I} u_n$. Lorsqu'elles sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} u_n + \sum_{n \in I} u_n$.

R2 – Une série peut n'être définie que pour $n \geq n_0$, et on note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série dans ce cas.

R3 – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc.

Cependant, en général, c'est en étudiant **son terme général** u_n (et non les sommes partielles) qu'on déduit des propriétés de la série.

R4 – Ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui n'est pas une somme!) et le **nombre** (lorsqu'il existe) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$ (qui s'appelle somme de la série et qui n'est pas une somme! C'est une limite...)

Propriété 1 : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Corollaire 1

Lorsque $|q| < 1$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Exemple : Série harmonique alternée

E1 – $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente de somme $\ln 2$.

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \int_0^1 t^p dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

puis

$$|S_n - \ln 2| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Autre preuve possible : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0, 1]$.

**Propriété 2 : Série exponentielle complexe**

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Démonstration

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, pour tout n , $f^{(n)}(0) = z^n$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange nous dit alors que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \left(|f^{(n+1)}(t)| \right)$$

Or, si $t \in [0, 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| = |z^{n+1} e^{tz}| = |z|^{n+1} e^{t \Re(z)} \leq |z|^{n+1} \max(1, e^{\Re(z)}) = |z|^{n+1} M(z)$ (indépendant de t).

$$\text{Donc } \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} M(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Donc } e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

**2 Correspondance suite et séries**

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n , c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1} = 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = S_n - S_{n-1}$$

Inversement, une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général u_n ?

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + u_1 \\ v_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 - v_0 \\ u_2 = v_2 - v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

Propriété 3 : Série télescopique

Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum (v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1} = 0$) appelée **série télescopique**.

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{-1} = v_n.$$

**Corollaire 2**

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$

Exercice 1 : Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de la somme.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La série est télescopique, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc la série est convergente, de somme 1.

Exercice 2 : Nature de $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

La série est télescopique, $S_n = \ln(n+1) - 0 \rightarrow +\infty$ donc la série diverge.

Remarque

R5 – Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série.
Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

3 Espace vectoriel des termes généraux de séries convergentes

Propriété 4 : Combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \Sigma_n = \sum_{k=0}^n v_k \text{ alors } \sum_{k=0}^n (u_k + \lambda v_k) = S_n + \lambda \Sigma_n.$$

Remarque

- R6** – Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
R7 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de $\sum (u_n + v_n)$.
R8 – Si $\sum v_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum (\lambda v_n)$ diverge si et seulement si $\lambda \neq 0$.

**Propriété 5 : Convergence des séries à termes complexes**

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes, elle converge si et seulement si les séries $\sum \Re u_n$ et $\sum \Im u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im u_n$$

Remarque

R9 – Lorsqu'il y a convergence,

$$\Re \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) \quad \text{et} \quad \Im \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n).$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière**Propriété 6 : Divergence grossière**

Si $u_n \not\rightarrow 0$, alors $\sum u_n$ diverge.

On parle de **divergence grossière**.

! La réciproque est fausse !

Si $u_n \rightarrow 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si (S_n) converge, $u_n \rightarrow 0$.

Contre-exemple. Si $u_n = \frac{1}{n}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est la **série harmonique**.

$u_n \rightarrow 0$ mais $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

On verra plus tard que $H_n \sim \ln n$.

5 Reste d'une série convergente**Définition 2 : Reste d'une série convergente**

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 7 : Reste sous forme de limite

Avec les mêmes hypothèses,

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Démonstration

$$S_N - S_n \rightarrow S - S_n = R_n \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty \text{ et } \sum_{k=n+1}^N u_k \rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

Exemple : Série géométrique

E2 – Si $|q| < 1$, $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété 8 : Le reste converge vers 0

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n , alors $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Démonstration

$$R_n = S - S_n.$$

6 Un critère simple pour des séries à termes positifs**Propriété 9 : Convergence d'une série à termes positifs**

Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Alors

- (i) (S_n) est croissante.
- (ii) (S_n) a une limite finie ou $+\infty$.
- (iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

Démonstration

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

**Méthode 1 : Manipulation de sommes de séries dans $[0, +\infty]$**

Finalement, dans le cas d'une série à termes positifs, on peut toujours poser

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in [0, +\infty].$$

Le programme autorise alors la manipulation algébrique dans $[0, +\infty]$ de sommes de séries à termes positifs même divergentes (dans ce cas la somme vaut $+\infty$) pourvu qu'on ne manipule que des nombres positifs ou $+\infty$ (pas de différences, par exemple).

Alors obtenir une somme finie équivaut à la convergence de la série : pratique !
Ce principe est généralisé dans le chapitre sur la sommabilité.



7 Séries alternées

Théorème 1 : Spécial sur certaines Séries Alternées (TSSA) – Critère de Leibniz

Si $v = (v_n)_n$ est une suite **réelle** telle que

H1 v est à signes alternés c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^{n+1} u_n$ où $u = |v|$

H2 $u = |v| = (|v_n|)$ décroissante

H3 $v_n \rightarrow 0$ ie $u_n = |v_n| \rightarrow 0$

alors $\sum v_n$ est convergente.

De plus,

- La somme S a le même signe que son premier terme v_0 .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n , R_n , a le même signe que son premier terme v_{n+1} et vérifie

$$|R_n| \leq |v_{n+1}| = u_{n+1}.$$

Démonstration

Supposons par exemple que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$ où $u = |v|$.

- Pour démontrer la convergence, on vérifie que les suites de sommes partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \rightarrow 0$.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$$

par décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ croît.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

par décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite.

Un théorème du cours nous permet alors de conclure que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers cette limite commune).

Ainsi, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

- On propose une démonstration alternative qui a la vertu de permettre une généralisation du théorème en utilisant ce qu'on appelle une **transformation d'Abel** (voir TD, il s'agit d'une IPP discrète).

L'idée est de remplacer $(-1)^n$ par $S'_n - S'_{n-1}$ où $S'_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = 1$ si n est pair et 0 sinon, et $S'_{-1} = 0$.

On a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^n (S'_k - S'_{k-1}) u_k = \sum_{k=0}^n S'_k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} S'_k u_{k+1} = S'_n u_n + \sum_{k=0}^{n-1} S'_k (u_k - u_{k+1})$$

avec, comme (S'_n) est bornée, $S'_n u_n \rightarrow 0$ et $S'_n (u_n - u_{n+1}) = \mathcal{O}(u_n - u_{n+1})$ où $u_n - u_{n+1}$ est un terme général positif de série télescopique convergente, donc $\sum S'_n (u_n - u_{n+1})$ est absolument convergente donc convergente.

On en déduit la convergence de la suite (S_n) donc de la série $\sum (-1)^n u_n$.

- $0 \leq u_0 - u_1 = S_1 \leq S$ donc S a bien le même signe que v_0 .

- Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

donc

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$$

et

$$0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2} = S_{2n+2} - S_{2n+1},$$

ce qui permet bien de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |v_{n+1}| = u_{n+1}$ et que R_n a le même signe que v_{n+1} .

Exemple

$$\text{E 3} - \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 3 : CCINP 8 : TSSA

Remarque

R 10 – La **transformation d'Abel** est l'équivalent discret (et hors-programme) de l'intégration par partie. Elle s'utilise pour obtenir des informations sur une somme partielle de la forme $\sum_{k=0}^n u_k v_k$.

L'idée est d'interpréter l'un des termes comme la « dérivée discrète » de la somme partielle correspondante.

Si on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, alors $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n - (n-1)}$.

On écrit alors $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) v_k$ et on sépare la somme deux puis on réindexe la deuxième pour obtenir un terme en $\sum S_k (v_{k+1} - v_k)$.

On a, en quelque sorte, primitivé le terme u_k et dérivé le terme v_k .

II CONVERGENCE ABSOLUE, SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS (MP2I)

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum (-u_n)$ si le signe est négatif.

Théorème 2 : Comparaison des séries à termes réels positifs – cas de convergence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.

Si $\sum v_n$ converge et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\blacksquare u_n = \mathcal{O}(v_n), \quad \blacksquare u_n = o(v_n), \quad \blacksquare \text{apcr } u_n \leq v_n, \quad \blacksquare u_n \sim v_n$$

alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Dans le premier cas, on a $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq M v_n$.

Si S_n et Σ_n désignent respectivement les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors, tout étant positif,



$S_n \leq S_{n_0} + M(\Sigma_n - \Sigma_{n_0})$ à partir du rang n_0 . Comme $\sum v_n$ converge, (Σ_n) est majorée donc (S_n) majorée donc $\sum u_n$ converge.
Les trois autres cas sont des cas particuliers du premier.

Corollaire 3 : Comparaison des séries à termes positifs – cas de divergence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.

Si $\sum u_n$ diverge et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\blacksquare u_n = \mathcal{O}(v_n), \quad \blacksquare u_n = o(v_n), \quad \blacksquare \text{apcr } u_n \leq v_n, \quad \blacksquare u_n \sim v_n$$

alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Contraposée du théorème.

Exemple

E4 – $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série (géométrique) convergente.

E5 – $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ terme général d'une série (télescopique) convergente. (On peut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

E6 – $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car à terme positif et si $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Propriété 10 : Cas de l'équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs** telles que $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

Symétrie de l'équivalence.

Remarque

R11 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum u_n$ converge, on ne peut rien dire de $\sum v_n$ en général.

Exemple

E7 – $\frac{1}{n^2} = \mathcal{O}(1)$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum 1$ diverge.

R12 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

Exemple

E8 – $\sum \frac{1}{n}$ diverge car à termes positifs $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ terme général d'une série (télescopique) divergente.

E9 – $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ converge car $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc à termes positifs à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.
 $\sum \sin \frac{1}{n^3}$ converge et $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

2 Convergence absolue

Définition 3 : Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3 : convergence absolue $\implies$ convergence

*Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.
 La réciproque est fausse.*

Démonstration

- **Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** On écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Donc, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.

- **Cas complexe.** $\sum \Re u_n$ et $\sum \Im u_n$ convergent absolument car $|\Re u_n| \leq |u_n|$ et $|\Im u_n| \leq |u_n|$ donc convergent.

Pour la réciproque fausse, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument. ■

Remarque

R13 – Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

**Démonstration**

Il suffit de l'écrire pour les sommes partielles et de passer à la limite. ■

**Méthode 2 : Utilisation de la comparaison pour des séries quelconques**

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = o(v_n)$ ou que $|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $|u_n| = o(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leq v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

Exercice 4 : CCINP 46 : Étude d'une série semi-convergente par développement asymptotique**3 Critère de d'Alembert (MPI)****Propriété 12 : Critère de d'Alembert**

Soit (u_n) suite à termes réels strictement positifs tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty].$$

- Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).

Démonstration

- Si $\ell > 1$ et $1 < q < \ell$, à partir d'un certain rang N , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ donc $u_n \leq q^{n-N} u_N \rightarrow +\infty$.
- Si $\ell < 1$ et $\ell < q < 1$, à partir d'un certain rang N , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ donc $u_n \leq q^{n-N} u_N$ avec $\sum q^n$ convergente. Donc, comme tout est positif, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général. Exemple : $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. ■

Exercice 5 : CCINP 6 : Critère de d'Alembert

4 Comparaison série-intégrale

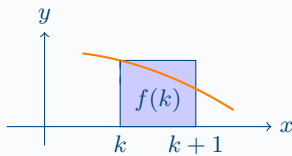
a Comparaison



Méthode 3 : Comparaison série-intégrale, cas décroissant

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et continue par morceaux.

On observe, pour $k \in \mathbb{N}$, en comparant les aires,



$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

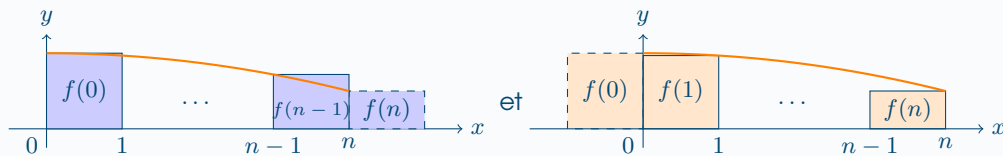
On peut alors ou bien sommer de 0 à n et obtenir

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k)$$

ou bien sommer de 0 à $n-1$ et rajouter $f(n)$ pour obtenir

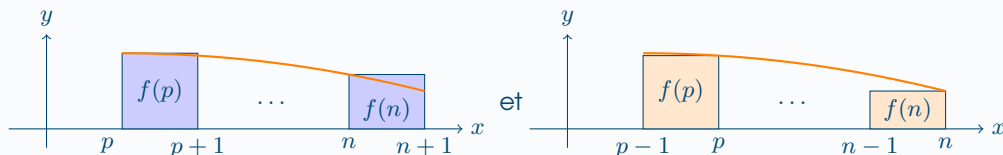
$$\int_0^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k).$$

En résumé,



$$\text{donnent } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^{n+1} f(t) dt$$

Et



$$\text{donnent } \int_p^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p}^n f(k) \leq \int_{p-1}^n f(t) dt$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

On peut aussi, suivant les besoins, mixer les deux en sortant un terme d'un côté et en modifiant les bornes de l'intégrale de l'autre.

**Remarque**

- R 14** – Il est interdit d'apprendre ces formules par cœur. Le plus important est de savoir les retrouver sur un dessin et de refaire le calcul.
- R 15** – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

Exercice 6 : Classique, jadis au programme... Écrits CCINP 2025 !

- Montrer que si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives, décroissante et si $\forall n \geq 1, w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$, alors $\sum w_n$ converge...
 - ... par un argument géométrique, en interprétant w_n comme une aire.
 - ... plus classiquement en utilisant un encadrement de w_n .
- En déduire qu'il existe une constante γ (appelée constante d'Euler) telle que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
Ce développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique est ultra classique. On ne connaît pas grand-chose de cette constante. On ne sait pas dire si c'est un nombre rationnel ou non, par exemple.
- Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant une série télescopique.
Cette méthode est absolument à savoir faire.
- Utiliser le développement asymptotique de H_n pour retrouver la valeur de la somme de la série harmonique alternée.

b**Lien avec l'intégrabilité**

La comparaison série-intégrale permet de relier la nature de la série $\sum f(n)$ à l'intégrabilité de f dans le cas d'une fonction **continue par morceaux, à valeurs positives et décroissante**.

Exercice 7 : Classique, jadis au programme... Écrits CCINP 2025 ! (bis)

Soit f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives, décroissante. Montrer que

$$\sum f(n) \text{ converge} \iff f \text{ est intégrable en } +\infty$$

Les termes sont positifs et une comparaison série-intégrale donne, dans $[0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} f + \lim_{+\infty} f \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f$$

ce qui permet de conclure.

c**Séries de Riemann****Théorème 4 : Séries de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser la technique de l'exercice précédent et le résultat connu sur les intégrales de Riemann. ■

Remarque

R 16 – On pose pour $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.
 ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

**Méthode 4 : Règle du $n^\alpha u_n$**

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple

E 10 – $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$.

E 12 – $u_n = e^{-n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

E 14 – $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$.

E 11 – $u_n = \frac{\text{Arctan } n}{\sqrt{n+1}}$

E 13 – $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 : CCINP 7 : Équivalent et signe, nature de série**d****Séries de Bertrand (HP mais classique)****Méthode 5 : Séries de Bertrand**

Il s'agit des séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais **très classique**.

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que la série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

On peut par comparaison série-intégrale se ramener au critère de convergence des intégrales de Bertrand mais il faut également savoir le traiter directement.

- Si $\alpha < 0$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leq 0$, il y a divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent) ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 0)$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, avec $\gamma \in]1, \alpha[$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ étant convergente, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

**Exercice 9 : CCINP 5 : Cas particulier de série de Bertrand****Évaluation des sommes partielles et des restes**

La comparaison série-intégrale est un bon outil pour évaluer asymptotiquement les sommes partielles dans le cas de divergence et les restes dans le cas de convergence dans le cas d'une fonction **continue par morceaux et monotone**.
Aucun résultat théorique au programme, voyons-le sur quelques exemples.

Exemple : Cas de divergence

E 15 – Divergence et équivalent des sommes partielles de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. Soit avec le w_n , soit : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt + \frac{1}{n \ln n} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt$$

donc

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n \ln n} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln(2))$$

Donc $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \rightarrow +\infty$.

En fait, on a obtenu mieux que cela : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

E 16 – **Très classique**. Même question pour $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Par comparaison série-intégrale,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n$$

donc $H_n \sim \ln n$ par encadrement.

E 17 – Équivalent de $\sum_{k=0}^n k^\alpha$ où $\alpha > 0$.

Remarque

R 17 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ diverge et $f(n) \rightarrow 0$, $S_n \sim F(n)$ où F primitive de f .

Exemple : Cas de convergence

E 18 – On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et on cherche une estimation asymptotique de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Par comparaison à une intégrale,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

puis en faisant $N \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

et $R_n \sim \frac{1}{n}$ (convergence lente.) Pour une précision de 10^{-2} dans le calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, il faut prendre $n = 100$.

Peut-on faire mieux ? Oui ! On a aussi

$$\left| S - \left(S_n + \frac{1}{n} \right) \right| = \left| R_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

En considérant $S_n + \frac{1}{n}$, on obtient une convergence en $\frac{1}{n^2}$. Cette fois $n = 10$ suffit ! On parle de technique d'accélération de convergence.

Remarque

R 18 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ converge de reste

$$R_n, I = \int_0^\infty f(t) dt \text{ et } I_n = \int_0^n f(t) dt,$$

$$I - I_{n+1} \leq R_n \leq I - I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de R_n .



FORMULE DE STIRLING (MP2I)

Théorème 5 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Démonstration

- **Première étape.** On montre que $n! \sim K(n/e)^n \sqrt{n}$ avec $K > 0$.

Soit $u_n = \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}}$. L'idée est de démontrer que $(\ln u_n)$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Or

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1 + 1/n)^{n+1/2}}$$

donc

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\ln u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $u_n \rightarrow e^\ell = K$ d'où le résultat.

- **Deuxième étape.** Pour déterminer K , on utilise le résultat classique des intégrales de Wallis. Si $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$, alors $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$, puis (I_n) décroît, puis $I_{n+1} \sim I_n$, puis $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$, puis $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{K \pi (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{2 \cdot 4^n K^2 n^{2n} e^{-2n} n} = \frac{\pi}{K \sqrt{2n}}$$

d'où $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\pi}{K \sqrt{2n}}$ puis $K \sim \sqrt{2\pi}$ donc $K = \sqrt{2\pi}$. ■

**Corollaire 4 : Développement asymptotique de $\ln(n!)$**

On en déduit un développement asymptotique de $\ln(n!)$.

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

Démonstration

$$\ln \left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right) \rightarrow 0$$

IV SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON (MPI)

1 Cas de divergence

Théorème 6 : Sommation dans le cas de divergence

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S_n(v) = \sum_{k=0}^n v_k$. On suppose

H1 v une suite à valeurs **réelles positives**.

H2 $\sum v_n$ **diverge**.

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v))$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Remarque

R 19 – C'est encore valable si $v_n \geq 0$ seulement à partir d'un certain rang. Cette hypothèse de positivité est capitale !

R 20 –  Le sens de la comparaison diffère de celui du théorème classique de divergence par comparaison. De plus, rien n'impose à la série $\sum u_n$ de diverger dans les deux premiers cas. Elle peut très bien converger.

Démonstration

C'est le même principe que pour le théorème de Cesàro. Comme $S_n(v) \rightarrow +\infty$, on a un rang N_0 à partir duquel $S_n(v) > 0$.

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geq N$, $|u_n| \leq M v_n$.

Si $n \geq N$, $|S_n(u)| \leq |S_N| + M(S_n(v) - S_N(v)) \leq |S_N(u)| + M S_n(v)$.

Or $S_n(v) \rightarrow +\infty$, donc on a un rang N' tel que si $n \geq N'$, $|S_n(u)| \leq S_n(v)$.

Ainsi, pour $n \geq \max(N, N')$, $|S_n(u)| \leq (M+1)S_n(v)$ et $S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v))$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$.

Si $n \geq N$, $|S_n(u)| \leq |S_N| + \frac{\varepsilon}{2}(S_n(v) - S_N(v)) \leq |S_N(u)| + \frac{\varepsilon}{2} S_n(v)$.

Si $n \geq \max(N, N_0)$, $\frac{|S_n(u)|}{S_n(v)} \leq \frac{|S_N(u)|}{S_n(v)} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Et enfin $\frac{|S_n(u)|}{S_n(v)} \rightarrow 0$ donc on a un rang N' à partir duquel $\frac{|S_n(u)|}{S_n(v)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, si $n \geq \max(N, N_0, N')$, $|S_n(u)| \leq \varepsilon S_n(v)$ et $S_n(u) = o(S_n(v))$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = u_n - v_n = o(v_n)$. Soit $T_n = S_n(u) - S_n(v) = \sum_{k=0}^n w_k = o(S_n(v))$ par (ii). Donc $S_n(u) \sim S_n(v)$. ■

Exemple

É 19 – Équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ terme général positif d'une série divergente, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2 \sum_{k=1}^n u_k = 2(\sqrt{n+1} - 1) \sim 2\sqrt{n}$. Se retrouve aussi par comparaison série-intégrale.

Théorème 7 : de Cesàro

Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{K}$ (éventuellement infinie) et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ alors $v_n \rightarrow \ell$.

Démonstration

On veut montrer que $v_n \rightarrow \ell$ soit $v_n - \ell = o(1)$.

Or $u_n - \ell = o(1)$ et 1 est un terme général positif de série divergente. Donc $\sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = o(n)$ soit encore, en divisant par n , $v_n - \ell = o(1)$.

Si $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Alors $1 = o(u_n)$, avec, au moins à partir d'un certain rang $u_n > 0$, donc, par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, $n = o(S_n)$ donc $\frac{|S_n|}{n} \rightarrow +\infty$, puis $S_n = n \times \frac{|S_n|}{n} \rightarrow +\infty$ donc à partir d'un certain rang $S_n > 0$ et ainsi $v_n = \frac{S_n}{n} \rightarrow +\infty$.
De même ou en changeant u_n en $-u_n$, si $u_n \rightarrow -\infty$, $v_n \rightarrow -\infty$. ■

2 Cas de convergence

Théorème 8 : Sommation dans le cas de convergence

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note, sous réserve d'existence, $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

On suppose

H1 v une suite à valeurs **réelles positives**.

H2 $\sum v_n$ **diverge**.

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v))$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = o(R_n(v))$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Démonstration

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geq N$, $|u_n| \leq Mv_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.



Si $n, p \geq N$, $\left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \leq M \sum_{k=n+1}^p v_k$. Puis, en faisant $p \rightarrow +\infty$, $|R_n(u)| \leq MR_n(v)$ donc $R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v))$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente. Avec le même calcul en remplaçant M par ε , si $n \geq N$, $|R_n(u)| \leq \varepsilon R_n(v)$ donc $R_n(u) = o(R_n(v))$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| \sim v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

$w_n = u_n - v_n = o(v_n)$ donc $\sum w_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o(R_n(v))$. Or, si $p \geq n$,

$$\sum_{k=n+1}^p (u_k - v_k) = \sum_{k=n+1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^p v_k$$

donc, en faisant $p \rightarrow +\infty$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = R_n(u) - R_n(v) = o(R_n(v))$ et donc $R_n(u) \sim R_n(v)$. ■

V COMPLÉMENT. DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL ILLIMITÉ

Un dernier résultat qui n'est plus dans le programme mais qu'il est bon de connaître d'une part pour la culture, et d'autre part pour la démonstration classique de l'indénombrabilité de $\mathbb{R}$ par argument diagonal de Cantor (hors-programme aussi, certes.)

Théorème 9 : [HP]

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0,a_1a_2\dots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n \geq 1} \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

Définition 4 : développement décimal illimité propre

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x .

Démonstration

Remarquons qu'une telle série converge bien ($\mathcal{O}(10^{-n})$).

De plus, si on considère cette série, et si l'on note $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x), alors on sait déjà que $x_n \rightarrow x$.

Or $\frac{a_n}{10^n} = x_n - x_{n-1}$ donc la série est télescopique de somme $x - x_0 = x - \lfloor x \rfloor$.

De plus, la suite $(a_n)_n$ ne stationne pas sur 9. Sinon, en considérant p tel que $10^p x$ a une partie décimale ne contenant que des 9, on obtient que $10^p x = 1$ donc $x = 10^{-p}$ et ainsi, si $n > p$, $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor = 0$, ce qui est contradictoire.

Cela donne l'existence.

Lemme 1

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 1$ avec pour tout n , $b_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, alors, pour tout n , $b_n = 9$.

Démonstration

Soit $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \in [0, 1]$ tel que tous les b_n ne soient pas égaux à 9. Montrons que $x < 1$.

Soit n_0 le plus petit entier tel que $b_{n_0} \neq 9$ (donc $x = 0,99 \dots 9 b_{n_0} b_{n_0+1} \dots$) et

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-n_0} = 0, b_1 \dots b_{n_0-1} 9 = \underbrace{0,9 \dots 9}_{n_0 \text{ fois}}.$$

Alors $1 - x_0 = 10^{-n_0} > 0$ et comme $b_{n_0} \neq 9$, $x \leq x_0 < 1$. ■

Pour l'unicité, si on a une telle écriture, alors

$$10^n x = 10^n N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} = 10^n N + \sum_{k=1}^n a_k 10^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}}$$

avec $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} \leq 1$. Par hypothèse et d'après le lemme, on a en fait $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} < 1$, et on obtient

$$\lfloor 10^n x \rfloor = 10^n N + \sum_{k=1}^n a_k 10^{n-k} \text{ ce qui redonne facilement } a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

$N = \lfloor x \rfloor$ en utilisant le lemme également. ■

Remarque

R21 – Les seuls nombres réels à avoir deux développements décimaux illimités sont les nombres décimaux. Le développement illimité propre est celui se terminant par des 0, l'autre se termine par des 9.

R22 – Bon à savoir et exercice pas inintéressant : les nombres rationnels sont exactement les réels à écriture décimale périodique à partir d'un certain rang.