

Intégrales généralisées

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

1 INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente en $+\infty$

Définition 1 : Intégrale convergente en $+\infty$

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Propriété 1 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Propriété 2 : Intégrales exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Propriété 3 : Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

Alors $\int_a^{+\infty} (f + \lambda g)$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (f + \lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$

Propriété 4 : Choix de la borne inférieure

Soient $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$, $b \in [a, +\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ ont même nature.

Si elles convergent, $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Propriété 5 : Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$

Soient $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ telle que $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Alors $\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $\varphi' = -f$.

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété 6 : Cas des fonctions réelles positives

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante, et $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si F est majorée.

Définition 2 : Intégrale de fonction positive

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

On pose $\int_a^{+\infty} f$ la limite finie ou $+\infty$ de $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ en $+\infty$.

Théorème 1 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, telles que

H1 $\int_a^{+\infty} g$ converge

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au v. de $+\infty$, $0 \leq f \leq g$ ou $f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g)$ ou $f \underset{+\infty}{=} o(g)$,

alors

C1 $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Théorème 2 : Divergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, telles que

H1 $\int_a^{+\infty} g$ diverge

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au v. de $+\infty$, $0 \leq g \leq f$ ou $g \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(f)$ ou $g \underset{+\infty}{=} o(f)$,

alors

C1 $\int_a^{+\infty} f$ diverge.

**Théorème 3 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par équivalent**

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \sim_{+\infty} g$. Alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ ont même nature.

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ **Définition 3 : Fonction intégrable**

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a, +\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente**.

On note $f \in L^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Théorème 4 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
La réciproque est fautive en général mais vraie pour des fonctions de signe constant.

Théorème 5 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

■ On suppose que

H1 g est intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au v. de $+\infty$, $f \leq g$ ou $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou $f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$,

alors

C1 f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

■ Si $f \sim_{+\infty} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Corollaire 1 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

■ On suppose que

H1 g est intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au v. de $+\infty$, $|f| \leq |g|$ ou $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou $f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$,

alors

C1 f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

■ Si $f \sim_{+\infty} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Corollaire 2 : Non intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

On suppose que

H1 f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au v. de $+\infty$, $|f| \leq |g|$ ou $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou $f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$,

alors

C1 g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

**INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE****1 Cas d'un intervalle semi-ouvert**

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 4 : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

Lorsque f est à valeurs réelles positives et que $\int_a^b f(t) dt$ diverge, on note $\int_a^b f(t) dt = +\infty$.

On dit que f est **intégrable** sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) lorsque $\int_a^b |f|$ converge, et on note $f \in L^1([a, b[, \mathbb{K})$ (respectivement $f \in L^1(]a, b], \mathbb{K})$).

Propriété 7 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (respectivement $] -\infty, -1]$) si et seulement si $\alpha > 1$.

■ $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (respectivement $[-1, 0[$) si et seulement si $\alpha < 1$.

■ Pour $\alpha = 1$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est intégrable ni en 0, ni en $\pm\infty$.

Théorème 6 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$.

■ Si g est intégrable sur $[a, b[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

Au v. de b , $|f| \leq |g|$ ou $f = \mathcal{O}_b(g)$ ou $f = \mathcal{o}_b(g)$,

alors f est intégrable sur $[a, b[$.

■ Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$ en comparant au voisinage de a .

Corollaire 3 : Non intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$.

Si f n'est pas intégrable sur $[a, b]$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\text{Au v. de } b, |f| \leq |g| \quad \text{ou} \quad f = o_b(g) \quad \text{ou} \quad f = o_b(g),$$

alors g n'est pas intégrable sur $[a, b]$.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$ en comparant au voisinage de a .

Propriété 8 : Indépendance du choix de l'autre borne

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$, $c \in [a, b]$.

Alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.

Propriété 9 : Cas d'une fonction prolongeable par continuité

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f a une limite finie en b , c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.

2 Cas d'un intervalle ouvert**Définition 5 : Convergence d'intégrale et intégrabilité sur un intervalle ouvert**

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

On dit que f est **intégrable** sur $]a, b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge et on note $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème 7 : L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I . Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f$ converge.

Propriété 10 : Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$

■ L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Cet espace vectoriel est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

■ L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I ,

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Propriété 12 : Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \Re(f)$ et $\int_I \Im(f)$ convergent.

$$\text{Dans ce cas, } \int_I f = \int_I \Re(f) + i \int_I \Im(f).$$

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale

Méthode 1 : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de

$$\int_a^b f$$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle borné sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable. C'est le cas par exemple si la fonction est continue et prolongeable par continuité en une borne ouverte (et c'est alors encore plus simple à justifier : il suffit de considérer l'intégrale sur un segment du prolongement, qui ne présente pas de problème).
- Si I est un intervalle ouvert $]a, b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a, b[$ et on est ramené à une étude sur $]a, c]$ et $[c, b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \dots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.

S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.

Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

**PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES****1 Relation de Chasles**

La notion d'intégrale généralisée se... généralise au cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens.

**Propriété 13 : Relation de Chasles**

Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

(i) Si J sous-intervalle de I , alors $\int_J f$ converge.

(ii) Si $a, b, c \in \bar{I}$ éventuellement infinis,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

toutes ces intégrales étant bien convergentes.

2 Propriétés liées à l'ordre**Propriété 14 : liée à l'ordre**

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité $f \geq 0 \Rightarrow \int_I f \geq 0$.

Croissance $f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$.

Intégrale nulle Si f est positive, **continue** et intégrable sur I et si $\int_I f = 0$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.

De façon équivalente, si f est positive, **continue**, intégrable et non identiquement nulle sur I alors $\int_I f > 0$.

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne**Propriété 15 : Dérivation**

Les bornes ouvertes peuvent être éventuellement infinies.

Si f est **continue** sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $g' = -f$.

Si f est **continue** sur $]a, b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et $h' = f$.

IV**CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES****1 Changement de variable****Théorème 8 : Changement de variable**

Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une **bijection de classe $\mathcal{C}^1$** . Alors φ est strictement monotone.

On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow{u \rightarrow \alpha} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow{u \rightarrow \beta} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Propriété 16 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x - a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (respectivement $]a, b]$) si et seulement si $\alpha < 1$.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par parties sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

V**INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON****Théorème 9 : Intégration des relations de comparaison : cas de divergence**

Soit f et g deux fonctions numériques continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose

H1 g est une fonction à valeurs **réelles positives**.

H2 $\int_a^b g$ diverge.

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) si $f = \mathcal{O}_b(g)$, alors $\int_a^x f = \mathcal{O}_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g \right)$

(ii) si $f = \mathcal{o}_b(g)$, alors $\int_a^x f = \mathcal{o}_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g \right)$

(iii) Si $f \sim_b g$, alors $\int_a^x f \sim_{x \rightarrow b} \int_a^x g$

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.

Théorème 10 : Intégration des relations de comparaison : cas de convergence

Soit f et g deux fonctions numériques continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose

H1 g est une fonction à valeurs **réelles positives**.

H2 $\int_a^b g$ converge (c'est-à-dire g intégrable sur $[a, b]$).

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) si $f = \mathcal{O}_b(g)$, alors f **intégrable** et $\int_x^b f = \mathcal{O}_b \left(\int_x^b g \right)$

(ii) si $f = \mathcal{o}_b(g)$, alors f **intégrable** et $\int_x^b f = \mathcal{o}_b \left(\int_x^b g \right)$

(iii) Si $f \sim_b g$, alors f **intégrable** et $\int_x^b f \sim_{x \rightarrow b} \int_x^b g$

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.