

Intégrales généralisées

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.



INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente en $+\infty$

Définition 1 : Intégrale convergente en $+\infty$

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque

Dans ce cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Remarque

R1 – Lorsque $\int_a^{+\infty} f$ diverge, l'objet $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ n'a aucun sens... sauf dans le cas où f est à valeurs réelles positives (cf partie suivante).

Exemple

$$\text{E1} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\text{E2} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$$

Propriété 1 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si

Propriété 2 : Intégrales exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si

Exercice 1 : Cas particulier d'intégrales de Bertrand

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

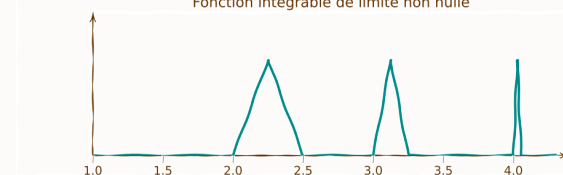
Remarque

R2 –  $\sum u_n$ converge $\implies u_n \rightarrow 0$. Ce n'est plus le cas pour la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.

Par exemple, si on considère la fonction f nulle partout sauf entre n et $n + \frac{2}{n^2}$ où elle dessine un triangle isocèle de hauteur 1, d'aire $\frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 2$. Alors $f \geq 0$,

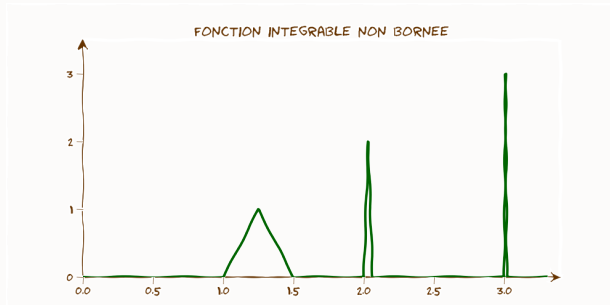
$\int_a^x f \leq \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6} - 1$ et $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante donc $\int_a^{+\infty} f$ converge, et pourtant $f(x) \not\rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Fonction intégrable de limite non nulle





On peut même construire une fonction f non bornée dont l'intégrale converge : il suffit que les triangles soient de hauteur n et de base $\frac{2}{n^3}$.



Par contre, si f a une limite non nulle, l'intégrale diverge.

Propriété 3 : Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

Alors $\int_a^{+\infty} (f + \lambda g)$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (f + \lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$

Propriété 4 : Choix de la borne inférieure

Propriété 5 : Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$

Soient $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ telle que $\int_a^{+\infty} f$ converge.
Alors

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété 6 : Cas des fonctions réelles positives

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

$\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si

Définition 2 : Intégrale de fonction positive

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

On pose $\int_a^{+\infty} f$ la limite finie ou $+\infty$ de $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ en $+\infty$.

Remarque

R3 – On se permet donc d'écrire $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence, **seulement dans le cas où f est à valeurs réelles positives.**

Théorème 1 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, telles que

H1

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

alors

C1

Remarque

R4 – Similaire aux séries.

Il est indispensable que les fonctions soient à valeurs positives !

Théorème 2 : Divergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, telles que

H1

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

alors

C1

Théorème 3 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors

3

Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ **Définition 3 : Fonction intégrable**

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a, +\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et que

On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente**.

On note $f \in L^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Exemple

E3 – Intégrales de Riemann : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

E4 – Intégrales exponentielles : $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème 4 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

La réciproque est fausse en général mais vraie pour des fonctions de signe constant.

Remarque

R5 – Le programme stipule que « Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. »

C'est puissant ! On peut travailler dans $[0, +\infty[$ lorsque la fonction est positive, et obtenir l'intégrabilité lorsque le résultat n'est pas $+\infty$.

R6 – Une intégrale $\int_a^{+\infty} f$ convergente mais non absolument convergente et dite semi-convergente.

R7 – Comme on l'a vu avec cet exemple, dans la pratique, pour procéder à une intégration par parties, on se ramène à une borne finie x puis on passe à la limite. Cela évite de risquer d'écrire des termes qui n'existent pas. Voir plus loin.

**Théorème 5 : Intégrabilité par comparaison**

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

■ On suppose que

H1 g est intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au voisinage de $+\infty$, $f \leq g$ ou $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou $f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$,

alors

C1 f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

■ Si $f \sim_{+\infty} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Remarque

R 8 – Si les fonctions ne sont pas à valeurs positives, on met des valeurs absolues/modules. Ainsi, si $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$ telles que g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et ($f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou

$f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$), alors ($|f| = \mathcal{O}_{+\infty}(|g|)$ ou $|f| = \mathcal{o}_{+\infty}(|g|)$) donc $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Et si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$ et $\int_a^{+\infty} |f|$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} |g|$ converge.

Corollaire 1 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

■ On suppose que

H1 g est intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au voisinage de $+\infty$, $|f| \leq |g|$ ou $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou $f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$,

alors

C1 f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

■ Si $f \sim_{+\infty} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Corollaire 2 : Non intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

On suppose que

H1 f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

Au voisinage de $+\infty$, $|f| \leq |g|$ ou $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ ou $f = \mathcal{o}_{+\infty}(g)$,

alors

C1 g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Remarque

R 9 –  g peut ne pas être intégrable mais avoir tout de même une intégrale convergente!

Exercice 2 : CCINP 25 question 1. : Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction

$t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ **est intégrable sur $[0, +\infty[$.**

Exercice 3 : Montrer que $x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 : Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 : Classique : intégrales de Bertrand

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si

$\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

(Même résultat que sur les séries, mais c'est plus simple à démontrer.)



INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

1

Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 4 : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

Lorsque f est à valeurs réelles positives et que $\int_a^b f(t) dt$ diverge, on note $\int_a^b f(t) dt = +\infty$.

On dit que f est **intégrable** sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) lorsque $\int_a^b |f|$ converge, et on note $f \in L^1([a, b[, \mathbb{K})$ (respectivement $f \in L^1(]a, b], \mathbb{K})$).

Remarque

R 10 – On dit aussi que f est intégrable en b (respectivement en a).

R 11 – Si la borne ouverte est finie et que f possède une limite finie au point, il suffit de faire un prolongement par continuité : on est ramené à une intégrale sur un segment.

Par exemple, $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ converge sans problème.

R 12 – Le programme stipule que « Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence », comme dans le chapitre sur la sommabilité.

R 13 – Les anciens programmes parlaient d'intégrale **impropre en b** .

Exemple

E 5 – $\tan$ n'est pas intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Propriété 7 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, -1]$) si et seulement si

■ $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (respectivement $[-1, 0[$) si et seulement si

■ Pour $\alpha = 1$,

Exemple

E 6 – $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$

Théorème 6 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$.

■ Si g est intégrable sur $[a, b]$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

Au voisinage de b , $|f| \leq |g|$ ou $f = o_b(g)$ ou $f = o_b(g)$,

alors f est intégrable sur $[a, b]$.

■ Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si g l'est.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$ en comparant au voisinage de a .

**Corollaire 3 : Non intégrabilité par comparaison**

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$.

Si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\text{Au voisinage de } b, |f| \leq |g| \text{ ou } f = o_b(g) \text{ ou } f = o_b(g),$$

alors g n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$ en comparant au voisinage de a .

Propriété 8 : Indépendance du choix de l'autre borne

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$, $c \in [a, b]$.

Alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.

Propriété 9 : Cas d'une fonction prolongeable par continuité

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f a une limite finie en b , c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors f est intégrable sur $[a, b[$.

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.

Remarque

R 14 – Les anciens programmes parlaient d'intégrales **faussement impropres**.

2 Cas d'un intervalle ouvert**Définition 5 : Convergence d'intégrale et intégrabilité sur un intervalle ouvert**

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

On dit que f est **intégrable** sur $]a, b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge et on note $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$.

Exemple

$$\text{E 7 – Pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Remarque

R 15 –  Il faut démontrer la convergence des deux intégrales **séparément** !

Exemple

$$\text{E 8 – } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan t dt \text{ diverge alors que pour tout } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \int_{-x}^x \tan t dt = 0.$$

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème 7 : L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I . Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f$ converge.

Propriété 10 : Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$

- L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Cet espace vectoriel est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.
- L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.

Remarque

R 16 – Donc si f, g intégrables sur I , alors $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

R 17 –  Comme pour les séries, il faut y réfléchir à deux fois avant de séparer une intégrale généralisée en deux : on a vite fait de manipuler des termes qui n'existent pas... Mais dans le cas des fonctions **positives**, le programme autorise de travailler dans $[0, +\infty]$.

R 18 – C'est encore le cas en prenant plus généralement les fonctions dont l'intégrale converge. Cependant, l'espace vectoriel en question n'a pas de nom particulier.

Exercice 6 : classique - montrer que $L^2(I, \mathbb{K}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K}, f^2 \in L^1(I, \mathbb{K})\}$ a une structure d'espace vectoriel.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I ,

Propriété 12 : Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \Re(f)$ et $\int_I \Im(f)$ convergent.

Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \Re(f) + i \int_I \Im(f)$.

4**Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale**

Méthode 1 : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle borné sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable. C'est le cas par exemple si la fonction est continue et prolongeable par continuité en une borne ouverte (et c'est alors encore plus simple à justifier : il suffit de considérer l'intégrale sur un segment du prolongement, qui ne présente pas de problème).
- Si I est un intervalle ouvert $]a, b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a, b[$ et on est ramené à une étude sur $]a, c]$ et $[c, b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \dots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.

S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.

Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

Exercice 7 : $x \mapsto \cos^3(1/x)$ sur $]0, 1]$.

Exercice 8 : Étudier l'existence de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ où $x \in \mathbb{R}$.



Exercice 9 : Existence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

R 19 –  Mauvaise rédaction :

$$\left| \int_0^x e^{-t} \sin(xt) dt \right| \leq \int_0^x e^{-t} dt \leq 1 \dots$$

Comme pour les séries, c'est à la fonction qu'on s'intéresse et non aux « intégrales partielles ».

Exercice 10 : CCINP 28



PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Relation de Chasles

La notion d'intégrale généralisée se... généralise au cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens.

Propriété 13 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

(i) Si J sous-intervalle de I , alors $\int_J f$ converge.

(ii) Si $a, b, c \in \bar{I}$ éventuellement infinis,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

toutes ces intégrales étant bien convergentes.

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriété 14 : liée à l'ordre

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité

Croissance

Intégrale nulle

De façon équivalente, si f est positive, **continue**, intégrable et non identiquement nulle sur I alors

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété 15 : Dérivation

Les bornes ouvertes peuvent être éventuellement infinies.

Si f est **continue** sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $g' =$

Si f est **continue** sur $]a, b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et $h' =$

Remarque

R 20 – Se retrouve avec une primitive.

IV

CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES

1 Changement de variable

Théorème 8 : Changement de variable

Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une **bijection de classe $\mathcal{C}^1$** . Alors φ est strictement monotone.

On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow[u \rightarrow \alpha]{} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u \rightarrow \beta]{} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Remarque

R 21 – Même nature est à prendre au sens convergentes ou divergentes ou absolument convergentes ou semi-convergentes.

C'est donc **très utile** pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

R 22 – Le programme autorise l'utilisation sans justification dans les cas usuels : φ fonction affine, puissance, exponentielle, logarithme.

R 23 – Mais il vaut mieux insister. Faire un changement de variable avec une rédaction de la forme : « Changement de variable $t = \varphi(u)$ où $\varphi : \dots \rightarrow \dots$ **bijective et de classe $\mathcal{C}^1$** ». On peut alors exprimer $u = \varphi^{-1}(t)$.

R 24 – Sur un segment, la bijectivité n'était pas nécessaire, ici elle l'est.

Exercice 11 : Trouver un lien entre l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 12 : Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ à l'aide des intégrales de Wallis

$$W_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k t dt.$$

Exercice 13 : Dédire de l'étude des intégrales de Bertrand en $+\infty$, celle de ces mêmes intégrales en 0, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Propriété 16 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x - a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (respectivement $]a, b]$) si et seulement si

Remarque

R 25 – Plus généralement, via un changement de variable, la fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par parties sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

Remarque

R 26 – Le programme donne tout de même un résultat, qu'on évitera d'utiliser : si f et g ont des limites finies en a et en b (« si le crochet existe »), les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes (mais seulement l'une peut être semi-convergente contrairement au changement de variable). Et en cas de convergence, on peut écrire

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

(ou le crochet est à prendre au sens des limites.)

Il est largement préférable, dans la pratique, de repasser par une intégration par parties classique sur un segment, avant de passer à la limite.

**Exemple**

E 9 – Par exemple,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

n'est pas acceptable. On peut, en modifiant légèrement ce calcul, le rendre néanmoins exact, et en déduire la surprenante relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

(ce qui est encore plus surprenant, c'est que l'on a également $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.)

Exercice 14 : Si $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

V**INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON****Théorème 9 : Intégration des relations de comparaison : cas de divergence**

Soit f et g deux fonctions numériques continues par morceaux sur $[a, b[$.
On suppose

H1 g est une fonction à valeurs **réelles positives**.H2 $\int_a^b g$ diverge.

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) si $f = o_b(g)$, alors(ii) si $f = o_b(g)$, alors(iii) Si $f \sim_b g$, alors

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.

Remarque

R 27 – ⚠ La fonction de référence est toujours à valeurs réelles positives (plus précisément, il suffit quelle soit de signe constant).

Théorème 10 : Intégration des relations de comparaison : cas de convergence

Soit f et g deux fonctions numériques continues par morceaux sur $[a, b[$.
On suppose

H1 g est une fonction à valeurs **réelles positives**.H2 $\int_a^b g$ converge (c'est-à-dire g intégrable sur $[a, b]$).

H3 L'une des hypothèses suivantes

(i) si $f = o_b(g)$, alors f **intégrable** et(ii) si $f = o_b(g)$, alors f **intégrable** et(iii) Si $f \sim_b g$, alors f **intégrable** et

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$.

Exercice 15 : Soit la fonction $f : x \mapsto \int_1^x e^{t^2} dt$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.