

Suites numériques (MP2I)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\begin{matrix} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{matrix}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou

$(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS** u_n !!!.

CAS DES SUITES RÉELLES

1 Limites

Définition 1 : Limite

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

ou de manière équivalente

$$\forall A \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

On note alors $u_n \rightarrow +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \rightarrow +\infty$ soit

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$$

ou de manière équivalente

$$\forall B \leq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$$

On note alors $u_n \rightarrow -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété 1 : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $v \rightarrow \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, l'inégalité devient large à la limite : $\ell < \ell'$.

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Théorème 1 : Limite par encadrement

- (i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\blacksquare v \rightarrow \ell$$

$$\blacksquare w \rightarrow \ell$$

$$\blacksquare \text{apcr}$$

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

alors $u \rightarrow \ell$.

- (ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\blacksquare v \rightarrow +\infty$$

$$\blacksquare \text{apcr}$$

$$u_n \geq v_n$$

alors $u \rightarrow +\infty$.

- (iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\blacksquare w \rightarrow -\infty$$

$$\blacksquare \text{apcr}$$

$$u_n \leq w_n$$

alors $u \rightarrow -\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété 3

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$.
 (ii) Si $u \rightarrow 0$ et v bornée, alors $uv \rightarrow 0$.

Propriété 4 : Limite de somme et produit

Si $u \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

$$\blacksquare u + v \rightarrow \ell_1 + \ell_2$$

$$\blacksquare uv \rightarrow \ell_1 \ell_2$$

Propriété 5 : Limite d'inverse

- Si $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$.



- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n < 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow -\infty$.

Propriété 6 : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$.
- Si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Théorème 3 : des suites adjacentes

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.



CRITÈRES SÉQUENTIELS

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété 7 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Propriété 8 : Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Définition 3 : Partie dense dans $\mathbb{R}$

Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \emptyset$.

Propriété 9 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

Corollaire 2 : Cas des réels et des décimaux

- (i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.
- (ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

II LES SUITES MONOTONES

1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

- (i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- (ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \rightarrow +\infty$ (respectivement $u \rightarrow -\infty$).

Corollaire 1

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lim u$ (respectivement $u_n \geq \lim u$).

De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition 2 : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \rightarrow 0$.

IV EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

Notation 1 : Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'une suite complexe

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\Re(z) = (\Re(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Im(z) = (\Im(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\bar{z}_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 4 : Convergence de suite complexe

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Propriété 10

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$z_n \rightarrow \ell \iff \Re z_n \rightarrow \Re \ell \text{ et } \Im z_n \rightarrow \Im \ell$$

Définition 5

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$.

Propriété 11 : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.



Méthode 1 : Étude générique de suite récurrente

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous !

- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables** par $f : I$ tel que $f(I) \subset I$.

Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geq n_0, u_n \in I$.

Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f . (Il faut donc chercher les points fixes !)

On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g .

Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !

- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f .
 - ★ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g .
 - ★ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **monotone**.
(Si $u_{n_0} \leq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$

et si $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$

- ★ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geq \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.

Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fautive en général.)

V SUITES RÉCURRENTES

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Propriété 12 : Limite éventuelle, cas général

Si $u_n \rightarrow \ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).



2 Cas d'une fonction contractante

Définition 6 : Fonction contractante

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».



Méthode 2 : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f . Si c'est le cas, si $\ell \in I$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in I$ stable par f , alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell| \leq \dots \leq k^n |u_0 - \ell| \rightarrow 0.$$

Donc directement $u_n \rightarrow \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 4 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$.

Alors f est k -lipschitzienne :

$$\forall x, x' \in [a, b], |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

- u est **négligeable** devant v et on note $u = o(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, soit encore $u - v = o(v)$, c'est-à-dire $u = v + o(v)$.

Propriété 13 : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha > 0, \beta > 0, q > 1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll n^2.$$

Propriété 14

$$u \sim v \iff u = v + o(v)$$

2 Propriétés

Propriété 15 : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\alpha \neq 0$, $u = o(\alpha v) \implies u = o(v)$ et $u = O(\alpha v) \implies u = O(v)$.

(ii) $u = o(1) \iff u \rightarrow 0$ et $u = O(1) \iff u$ bornée.

(iii) Si $u = o(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = O(v)$ et la réciproque est fautive.

(iv) **Transitivité**

$$u = o(v) \text{ et } v = o(w) \implies u = o(w)$$

$$u = O(v) \text{ et } v = O(w) \implies u = O(w)$$

(v) **Combinaison linéaire**

$$u = o(w) \text{ et } v = o(w) \implies \alpha u + \beta v = o(w)$$

$$u = O(w) \text{ et } v = O(w) \implies \alpha u + \beta v = O(w)$$

(vi) **Produit**

$$u = o(v) \text{ et } a = o(b) \implies ua = o(vb)$$

$$u = O(v) \text{ et } a = O(b) \implies ua = O(vb)$$

VI RELATIONS DE COMPARAISON

1 Définition

Définition 7 : Relations de comparaison

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = O(v)$

lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.

Propriété 16 : Propriétés de $\sim$

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- (i) $\sim$ est une relation d'équivalence.
- (ii) Si $u \sim v$ et $v \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \rightarrow \ell$.
- (iii) $u \rightarrow \ell \neq 0 \iff u \sim \ell$.
- (iv) Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.
- (v) Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\frac{u}{a} \sim \frac{v}{b}$.
- (vi) Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.
- (vii) Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

3 Équivalents usuels**Propriété 17 : Formule de Stirling**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Propriété 18 : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \rightarrow 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1 + h_n) \sim h_n$
- $e^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1 + h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\text{Arctan } h_n \sim h_n$
- $\text{Arcsin } h_n \sim h_n$
- $\text{sh } h_n \sim h_n$
- $\text{th } h_n \sim h_n$

4 Exemples de développements asymptotiques**Définition 8 : Développement asymptotique**

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \dots + v_n^{(r)} + o(v_n^{(r)})$$

où $v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \dots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $v_n^{(k+1)} = o(v_n^{(k)})$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $v_n^{(r)}$.

**Méthode 3 : Calcul de développement asymptotique**

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + o(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + o(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

VII SUITES EXTRAITES, VALEURS D'ADHÉRENCE**Définition 9 : Suite extraite**

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.
 φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Propriété 19 : Cas des suites convergentes

Si $u \rightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

Définition 10 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $\mathbb{K}$) de suite extraite de u .

Corollaire 3 : Reformulation

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Corollaire 4 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

**Propriété 20 : Condition suffisante de convergence**

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème 5 : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

Propriété 22 : récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

On considère une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ **récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants**, c'est-à-dire telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle **équation caractéristique** associée (E) $r^2 = ar + b$.

On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

- Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- Soit (E) admet une unique solution (double) r dans $\mathbb{K}$, alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + nB)r^n.$$

- Soit (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))\rho^n$$

c'est-à-dire qu'on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = K \cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$

VIII THÉORÈME DE CESÀRO**Théorème 6 : de Cesàro**

Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{K}$ (éventuellement infinie) et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ alors $v_n \rightarrow \ell$.

Une application classique est la recherche d'équivalent d'une suite récurrente.

IX RÉCURRENCES LINÉAIRES D'ORDRE 1 ET 2**Propriété 21 : Suites arithmético-géométrique**

Soit une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Alors, si $\tilde{u}$ est solution particulière, on a $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de (H) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n$, équation homogène associée.

On cherche $\tilde{u}$ constante en général.