Programme de colle – MPI

1. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.
d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.
f) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Les notions d'idéal et d'anneau principaux ont été introduites.

Normes d'algèbres, séries exponentielle et géométrique dans une algèbre.

2. Passage à la limite sous l'intégrale

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence dominée	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n \rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
b) Intégration terme à terme	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$, $$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \lvert f_n(t) \rvert\,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Bien sûr, on connaît aussi les théorèmes d'intégration terme à terme dans le cas où l'intervalle est un segment et qu'il y a convergence uniforme.

Exemple de limite par découpage de l'intégrale.

Semaine prochaine Intégrales à paramètre. Révisions sur polynômes et fractions rationnelles. Révisions d'algèbre linéaire.

3. Questions de cours

(i) Définition d'un idéal principal, d'un anneau principal.
La somme et l'intersection d'idéaux sont des idéaux.
Tout corps est intègre.

(ii) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau principal.

(iii) Exercice classique : montrer que si $f:(A,+,\times)\to(A',\oplus,\otimes)$ est un morphisme d'anneaux :
- (a) L'image réciproque d'un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$ est un sous-anneau de $(A,+,\times)$.
- (b) L'image directe d'un sous-anneau de $(A,+,\times)$ est un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$.
- (c) L'image réciproque d'un idéal de $(A',\oplus,\otimes)$ par f est un idéal de $(A,+,\times)$.
- (d) L'image directe d'un idéal de $(A,+,\times)$ par f est un idéal de $\big(f(A)=\operatorname{Im} f,\oplus,\otimes\big)$.

(iv) Définition de l'indicatrice d'Euler. Démonstration du théorème d'Euler, d'où le petit théorème de Fermat.

(v) Tous les énoncés de théorèmes de limite d'intégrale (convergence uniforme sur un segment ; convergence dominée) et d'intégration terme à terme (convergence uniforme sur un segment ; cas des fonctions positives ; convergence de la série des normes N_1).

(vi) **Exercice CCINP 10, 14, 25, 26, 27, 49, 61, 86, 94**

4. Exercices CCINP

CCINP 10 : Limite d'intégrale sur un segment par convergence uniforme

On pose $f_n(x)=\big(x^2+1\big)\dfrac{n\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $\big(f_n\big)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1\big(x^2+1\big)\frac{n\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

CCINP 14 : Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
Soit $\big(f_n\big)$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.

1. On suppose que la suite $\big(f_n\big)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.
   Prouver que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$.
   Prouver, *en utilisant 1.*, que $\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac12}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

CCINP 25 : Convergence dominée

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pose $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).

CCINP 26 : Suite d'intégrales et série alternée

Pour tout entier $n\geqslant1$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}(-1)^nI_n$ est-elle convergente ?

CCINP 27 : Convergence uniforme et convergence dominée

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $\big(f_n\big)$ sur $[0,1]$.
2. Soit $a\in]0,1[$. La suite de fonctions $\big(f_n\big)$ converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions $\big(f_n\big)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

CCINP 40 : Séries géométriques et exponentielles dans une algèbre normée

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$.
On suppose que

$$\forall(u,v)\in A^2,\ \|u\cdot v\|\leqslant\|u\|\cdot\|v\|.$$

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\|<1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que
   $$(e-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n.$$
2. Démontrer que, pour tout $u\in A$, la série $\sum\dfrac{u^n}{n!}$ converge.

CCINP 49 : Théorème d'intégration terme à terme

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On admet, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. (a) *On admet* que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = n!$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

CCINP 61 : Norme d'algèbre et exponentielle de matrice

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{i,j}\right|.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que
   $$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\| \leqslant n\|A\|\|B\|.$$
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$,
   $$\left\|A^p\right\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p.$$
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

CCINP 86 : Preuve directe du petit théorème de Fermat

1. Soit $(a,b,p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n\ [p]$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

CCINP 94 : Système de congruences

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système $(S) : \begin{cases} x &\equiv 5 \ [6] \\ x &\equiv 4 \ [8] \end{cases}$ n'a pas de solution appartenant à $\mathbb{Z}$.
2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x &\equiv 6 \ [17] \\ x &\equiv 5 \ [16] \\ x &\equiv 4 \ [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

5. Programme de MP2I

A. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	