Programme de colle – MPI*

1. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.
d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.
f) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Les notions d'idéal et d'anneau principaux ont été introduites.

Caractéristique d'un corps. Lorsqu'elle n'est pas nulle, il s'agit d'un nombre premier.

Normes d'algèbres, séries exponentielle et géométrique dans une algèbre.

2. Passage à la limite sous l'intégrale

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence dominée	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n \rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
b) Intégration terme à terme	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$, $$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \lvert f_n(t) \rvert\,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Bien sûr, on connaît aussi les théorèmes d'intégration terme à terme dans le cas où l'intervalle est un segment et qu'il y a convergence uniforme.

Exemple de limite par découpage de l'intégrale.

Semaine prochaine Intégrales à paramètre. Révisions sur polynômes et fractions rationnelles. Révisions d'algèbre linéaire.

3. Questions de cours

(i) Définition d'un idéal principal, d'un anneau principal.
La somme et l'intersection d'idéaux sont des idéaux.
Tout corps est intègre.

(ii) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau principal.

(iii) Exercice classique : montrer que si $f:(A,+,\times)\to(A',\oplus,\otimes)$ est un morphisme d'anneaux :
  (a) L'image réciproque d'un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$ est un sous-anneau de $(A,+,\times)$.
  (b) L'image directe d'un sous-anneau de $(A,+,\times)$ est un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$.
  (c) L'image réciproque d'un idéal de $(A',\oplus,\otimes)$ par f est un idéal de $(A,+,\times)$.
  (d) L'image directe d'un idéal de $(A,+,\times)$ par f est un idéal de $\big(f(A)=\operatorname{Im} f,\oplus,\otimes\big)$.

(iv) Théorème des restes chinois : si $n\wedge m=1$, isomorphisme entre $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ puis entre $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

(v) Définition de l'indicatrice d'Euler. Il s'agit d'une application multiplicative.
Expression de $\varphi(n)$ à l'aide des diviseurs premiers de n.
Démonstration du théorème d'Euler, d'où le petit théorème de Fermat.

(vi) Tous les énoncés de théorèmes de limite d'intégrale (convergence uniforme sur un segment ; convergence dominée) et d'intégration terme à terme (convergence uniforme sur un segment ; cas des fonctions positives ; convergence de la série des normes N_1).

(vii) Série exponentielle et série géométrique dans une algèbre.
Lorsque que la série géométrique de raison x est convergente, inverse de $1_{\mathscr{A}}-x$.

(viii) Exercices classique : **Sous-groupes de** $(\mathbb{R},+)$

(ix) Exercice classique : **Formule de Legendre** donnant $v_p(n!)$.

(x) Exercice classique : **Polynômes cyclotomiques**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{e} de l'unité et $\mathbb{U}_n^*$ l'ensemble des racines de l'unité d'ordre exactement n. Enfin, pour $d\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\Phi_d=\prod_{z\in\mathbb{U}_d^*}(X-z).$$

1. Déterminer les éléments générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. En déduire les éléments de $\mathbb{U}_n^*$ et son cardinal.
2. Montrer que $X^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d$.
3. Justifier que $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.
4. Montrer que Φ_n est un polynôme à coefficients entiers.

(xi) Exercice classique : **Déterminant de Smith**
Calculer le déterminant de la matrice $\big(i\wedge j\big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

Les étudiants doivent savoir faire les exercices de la **Banque CCINP 10, 14, 25, 26, 27, 49, 61, 86, 94** mais ne seront pas interrogés dessus.

4. Programme de MP2I

A. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation a^n-b^n et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	