

CORRIGÉ DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 3

Exercice 1 : CCP Maths 1 MP 2012 — Normes équivalentes

1. **Bonne définition** La fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, f' est continue sur $[0,1]$ donc le réel $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt = |f(0)| + N_1(f')$ est bien défini.

Séparation Si $\|f\| = 0$, par somme de termes positifs, $|f(0)| = N_1(f') = 0$ donc $f(0) = 0$ et par séparation de la norme N_1 sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, $f' \equiv 0$ sur $[0,1]$.

Comme $[0,1]$ est intervalle, on en déduit que f est constante, et donc qu'il s'agit de la fonction nulle.

Homogénéité Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$,

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + N_1(\lambda f') = |\lambda|(|f(0)| + N_1(f')) = |\lambda| \|f\|$$

par homogénéité de la norme N_1 .

Inégalité triangulaire Si $f, g \in E$,

$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)| + N_1(f'+g') \leq |f(0)| + N_1(f) + |g(0)| + N_1(g) = \|f\| + \|g\|$$

par inégalité triangulaire des normes $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ et N_1 sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Ainsi, $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

2. (a) N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si on a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

(b) On remarque que pour tout $f \in E$,

$$\frac{1}{2} \|f\| \leq \|f'\| \leq 2 \|f\|$$

donc les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E .

3. Montrons que la norme $\|\cdot\|$ n'est pas équivalente à la norme N_1 .

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$.

Alors $\|f_n\| = 2 \not\rightarrow 0$ et $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ donc $\|\cdot\|$ n'est pas dominée par N_1 .

Exercice 2 : CCINP Maths 1 MP 2017 — Famille sommable

1. On a affaire à une somme double produit. Comme les termes sont positifs, quitte à travailler dans $[0, +\infty]$, on peut toujours écrire

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 < +\infty$$

Comme le résultat est fini, $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in A}$ est sommable et $\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{\pi^4}{36}$.

2. **Première méthode** On remarque que pour tout $(p, q) \in A$, $\frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2} \geq 0$.

Puis par une sommation par diagonale (sommation par paquets $A = \bigcup_{n=2}^{+\infty} D_n$ où

$$D_n = \{(p, q) \in A, p+q=n\} = \{(p, n-p), 1 \leq p \leq n-1\}$$

on peut écrire dans $[0, +\infty]$

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2} = +\infty$$

Car $\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ est un terme général positif de série divergente.

Donc $\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 + q^2} = +\infty$ et $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in A}$ n'est pas sommable.

Deuxième méthode Par le théorème de Fubini dans le cas positif, dans $[0, +\infty]$, on a

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 + q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$$

et on montre la divergence de la série de terme général $\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$ par comparaison

à une intégrale. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_p : t \mapsto \frac{1}{p^2 + t^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f_p(q) \geq \int_q^{q+1} f_p(t) dt$ donc en sommant et en passant à la limite, la série $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{p^2 + q^2}$ étant bien convergente,

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{p^2 + t^2} = \frac{1}{p} \int_1^{+\infty} \frac{\frac{dt}{p}}{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2} = \frac{1}{p} \left[\text{Arctan} \frac{t}{p} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{1}{p} \right) \geq \frac{\pi}{4p}$$

Or $\sum_p \frac{1}{p}$ diverge donc, par comparaison de termes positifs, $\sum_p \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2} \right)$ diverge et

$\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 3 : CCINP Maths 1 MP 2021 — Fonction ζ de Riemann

1. Soit $x > 1$. $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour tout $n \geq 1$, on peut écrire $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$, donc, pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ l'intégrale de Riemann $I(x)$ étant bien convergente avec $x > 1$,
 $I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$.

Or $I(x) = \left[\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$, donc $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1} + o_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right)$, donc par encadrement, $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

2. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n .

$\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A} = \left(\frac{1}{a^x} \times \frac{1}{b^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est une « suite double produit » **sommable** car les séries $\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^x}$ et $\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire **de somme $\zeta(x)^2$** . En effet, les termes sont positifs, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\frac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{\zeta(b)}{a^x}$ converge vers $\zeta(x)^2$.

On pose $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$, et alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$ et les A_n sont deux à deux disjoints.

Donc, par sommabilité et théorème de sommation par paquet, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n| = |\{(a, b) \in \mathbb{N}_*^2, n = ab\}| = \left| \left\{ \left(a, \frac{n}{a} \right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n \right\} \right| = d_n$.

Finalement, $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$.

Problème : d'après CCP TPC 2013 — Étude d'une série à paramètre

A. Cas où $\alpha > 1$

1. $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ donc **la série est convergente** car absolument convergente par comparaison à une série de Riemann.

B. Cas où α appartient à $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$

Nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \phi(t) dt$.

2. Le changement de variable $y = \sqrt{t}$ donne directement le résultat demandé.
3. $f : y \mapsto \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et dominée par $y \mapsto \frac{1}{y^{2\alpha}}$ qui y est intégrable par critère de Riemann, car $2\alpha > 1$. Par comparaison, f est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui implique la **convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$** .
4. Par intégration par partie à partir de la question 2, on obtient

$$\int_1^x \phi(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy = 2 \left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi} \right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$$

Comme $\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\sqrt{x}^{2\alpha-1}} \rightarrow 0$ en $+\infty$, et en utilisant la question précédente,

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \phi(t) dt$ est convergente.

Étude de la dérivée de la fonction ϕ .

5. ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ par opérations et si $t \in [1, +\infty[$, par inégalité triangulaire,

$$|\phi'(t)| = \left| \frac{\pi\sqrt{t} \cos(\pi\sqrt{t}) - 2\alpha \sin(\pi\sqrt{t})}{2t^{a+1}} \right| \leq \frac{\pi\sqrt{t} + 2\alpha}{2t^{a+1}} \leq \frac{(\pi+2\alpha)\sqrt{t}}{2t^{a+1}} \leq \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{t^{a+1/2}}$$

6. Si $(a, b) \in [1, +\infty]^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$\begin{aligned} |\phi(a) - \phi(b)| &= \left| \int_a^b \phi'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\phi'(t)| dt \leq \int_a^b \frac{K}{t^{a+1/2}} dt \\ &\leq \int_a^b \frac{K}{a^{a+1/2}} dt = \frac{K}{a^{a+1/2}} |a - b|. \end{aligned}$$

(On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis.)

Nature des séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$.

7. Par la relation de Chasles, $V_N = \int_1^{N+1} \phi(t) dt$, donc d'après la question précédente et la question 4, $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n < n+1$, en utilisant 6,

$$|u_n - v_n| = \left| \int_n^{n+1} (\phi(n) - \phi(t)) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |\phi(n) - \phi(t)| dt \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \int_n^{n+1} (t-n) dt \\ \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \int_n^{n+1} dt$$

Donc $|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$

9. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - v_n)$ est absolument convergente donc convergente.

Comme $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = u_n = (u_n - v_n) + v_n$ est la somme de deux termes généraux de séries convergentes, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

C. Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

10. On a $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n}} \left(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} - 1 \right) = e^{i\pi\sqrt{n}} \left(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} - 1 \right)$, ce qui avec un peu de calcul et de dextérité permet d'obtenir

$$\delta_n = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

11. En passant à la partie réelle, en notant que

$$\Re\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \Re\left(\frac{h_n}{n^{3/2}}\right) = \frac{\Re(h_n)}{n^{3/2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

(avec (h_n) bornée donc $(\Re(h_n))$ bornée). On obtient

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sin(\pi\sqrt{n}) - \frac{\pi^2}{8n} \cos(\pi\sqrt{n}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi} \left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) \right) - \frac{\pi}{4n} \cos(\pi\sqrt{n}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

12. Si $w_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, on a, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série

$$\sum_{n \geq 1} w_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

13. Comme $(\alpha_{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en est une suite extraite divergente, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

14. D'après les questions précédentes, $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est la somme de termes généraux de séries convergentes et d'UN terme général de série (télescopique) divergente, donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

D. Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

15. Soit N supérieur ou égal à 2.

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} n^{\alpha-1/2} = \sum_{n=1}^N (S_n - S_{n-1}) n^{\alpha-1/2} \\ = \sum_{n=1}^N S_n n^{\alpha-1/2} - \sum_{n=0}^{N-1} S_n (n+1)^{\alpha-1/2} \\ = \sum_{n=1}^N S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) + S_N (N+1)^{\alpha-1/2}$$

On dit qu'on a effectué une **transformation d'Abel**, équivalent discret de l'intégration par partie. ($\int \leftrightarrow \sum$ et $f' \leftrightarrow u_{n+1} - u_n$.)

16. $\alpha < 1/2$ et comme (S_n) converge, elle est bornée. Donc

$$S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$$

qui est le terme général d'une série (télescopique) positive convergente, donc la série $\sum_{n \geq 1} S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$ est convergente.

17. Comme $S_N (N+1)^{\alpha-1/2} \rightarrow 0$ et vu les deux questions précédentes,

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ est convergente.}$$

18. C'est contradictoire avec la partie précédente. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge.

Fin