

DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ n° 3

À LIRE ATTENTIVEMENT

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- **Il est conseillé d'utiliser un brouillon**. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- Donnez tout, croyez-y, vous êtes aux concours et vous voulez décrocher l'école de vos rêves!



- Extraits d'un rapport de jury CCINP : « *Voici quelques conseils pour les futurs candidats :*
 1. Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en trafiquant les calculs ; ceci indispose fortement le correcteur.
 2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
 3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
 4. Citer TOUTS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
 5. Numéroté les copies et les rendre dans l'ordre.
 6. Commencer l'épreuve par une lecture diagonale du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
 7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
 8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
 9. Soigner la présentation.
 10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultats qui doit être prouvé. »

Exercice 1 : CCP Maths 1 MP 2012 — Normes équivalentes

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour $f \in E$,

$$\|f\| = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

De même, $\|\cdot\|'$ est une norme sur E , il est inutile de le démontrer.

2. (a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
(b) Démontrer que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E .
3. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|$?

Exercice 2 : CCINP Maths 1 MP 2017 — Famille sommable

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in A}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 3 : CCINP Maths 1 MP 2021 — Fonction ζ de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $x > 1$. On pose $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$. Démontrer que

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n .

On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$.

Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$.

En déduire que

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$.

Problème : d'après CCP TPC 2013 — Étude d'une série à paramètre

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi \sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α .

A. Cas où $\alpha > 1$

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

B. Cas où α appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

On suppose, dans cette partie, que α appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On définit la fonction ϕ sur $[1, +\infty[$ en posant $\phi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

On pose $u_n = \phi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \phi(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \phi(t) dt$.

2. Montrer que pour tout $x > 1$

$$\int_1^x \phi(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy$$

3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$ est convergente.

4. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \phi(t) dt$ est convergente.

Étude de la dérivée de la fonction ϕ .

5. Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall t \in [1, +\infty[, |\phi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

6. Montrer que pour tout $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} |a - b|$$

Nature des séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$.

7. Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une intégrale et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

9. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

C. Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que α vaut $\frac{1}{2}$.

En vue du développement asymptotique de $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on pose $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$.

10. Déterminer des complexes a et b tels que $\delta_n = a \frac{e^{i\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + b \frac{e^{i\pi\sqrt{n}}}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

11. En déduire que $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi} \left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

12. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$?

On admet que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente, ce qui s'obtient de manière similaire à ce qui a été fait dans la partie précédente.

13. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\cos(\pi\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

14. Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

D. Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que le réel α est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge.

On suppose donc que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$, et $S_0 = 0$.

15. Montrer que pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) + S_N (N+1)^{\alpha-1/2}.$$

16. Justifier que $(S_n)_n$ est bornée puis que la série $\sum_{n \geq 1} S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$ est convergente.

17. Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

18. Conclure sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.