Source : Oraux X-ENS – Francinou, Gianella, Nicolas

1. Série de fonction et suite récurrente

Énoncé

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin x)\cdots))}_{n \text{ fois}}$.

Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Solution

- On pose $v_n(x) = \sin(\sin(\cdots(\sin x)\cdots)) \in [-1,1]$ pour $n \geqslant 1$.
  Comme $\sin x$ est du signe de x sur $[-1,1]$, $v_n(x)$ est du signe de $v_1(x)$: la série est alternée.
  De l'inégalité classique $|\sin x| \leqslant |x|$, on tire la décroissance de $(|u_n(x)|)_n$, qui est minorée par 0 elle converge donc vers ℓ tel que $|\sin \ell| = |\ell|$.
  Par étude de $\sin - \mathrm{id}$ et $\sin + \mathrm{id}$, on tire $\ell = 0$: le TSSA s'applique et donne la convergence simple.
- Pour l'absence de convergence normale, on remarque que $\|u_n\|_\infty = v_{n-1}(1) := a_n$. On cherche un équivalent de a_n.
  Pour cela, comme $a_n \to 0$ et $a_{n+1} = \sin a_n = a_n - \dfrac{a_n^3}{6} + o\left(a_n^3\right)$, on remarque que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
  $$a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + o\left(a_n^2\right)\right)^\alpha - 1\right) = a_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha a_n^2}{6} + o\left(a_n^2\right) - 1\right) \sim -\frac{\alpha}{6} a_n^{\alpha+2}$$
  Pour avoir un équivalent constant, on choisit $\alpha = -2$ et comme $\sum \dfrac{1}{3}$ diverge, par sommation dans le cas de divergence,
  $$a_n^{-2} - a_n^{-2} = \sum_{k=2}^{n-2} \left(a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}\right) \sim \frac{n-3}{3} \sim \frac{n}{3}$$
  Et comme $a_n \to 0$, on tire $a_n^{-2} \sim \dfrac{n}{3}$ puis $a_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ ce qui permet bien de conclure l'absence de convergence normale.
- Pour la convergence uniforme, par le TSSA, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant a_{n+1} \to 0$ permet de conclure.

2. Régularité d'une série trigonométrique

Énoncé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On pose, pour x réel, $u(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n e^{inx}$.

1. On suppose que la famille $\left(n^2a_n^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Montrer l'existence et la continuité de u sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la sommabilité de la famille $\left(n^\alpha a_n^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ garantisse l'existence et la continuité de u sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que la famille $\left(n^4a_n^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Que peut-on dire de plus de u ?

Solution

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tout $N\in\mathbb{N}$

$$\sum_{0<|n|\leqslant N}|a_n|=\sum_{0<|n|\leqslant N}|na_n|\frac{1}{|n|}\leqslant\left(\sum_{|n|\leqslant N}n^2|a_n|^2\sum_{0<|n|\leqslant N}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|a_n|^2\times 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}.$$

On en déduit en particulier que les séries $\sum a_n e^{inx}$ et $\sum a_{-n}e^{-inx}$ convergent normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (puisque, pour tout réel x, $|a_n e^{inx}|=|a_n|$), ce qui montre que u est définie sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $u_n:x\mapsto a_n e^{inx}$ étant continues sur $\mathbb{R}$, la fonction u est également continue sur $\mathbb{R}$.

On aurait aussi pu utiliser l'inégalité classique $|a_n|=\left|\pm na_{\pm n}\cdot\frac{1}{\pm n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(n^2|a_n|^2+\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Pour $\alpha>1$, on peut écrire de même $|a_n|=|\pm n|^{\alpha/2}|a_{\pm n}|\cdot\frac{1}{|\pm n|^{\alpha/2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(n^\alpha|a_n|^2+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ou encore

$$\sum_{0<|n|\leqslant N}|a_n|=\sum_{0<|n|\leqslant N}|n|^{\frac{\alpha}{2}}|a_n|\frac{1}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\left(\sum_{|n|\leqslant N}|n|^\alpha|a_n|^2\sum_{0<|n|\leqslant N}\frac{1}{|n|^\alpha}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^\alpha|a_n|^2\times 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\right)^{1/2}$$

et la conclusion est la même.

Pour $\alpha=1$, la conclusion n'est plus assurée. Considérons par exemple la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $a_n=\frac{1}{n\ln n}$ si $n>0$ et $a_n=0$ sinon. On a $na_n^2=\frac{1}{n(\ln n)^2}$. Il est classique que la série $\sum\frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge (c'est une série de Bertrand ; plus généralement la série $\sum\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge pour $\alpha>1$). Mais la série $\sum a_n$ diverge (c'est encore une série de Bertrand, avec cette fois-ci $\alpha=1$). La fonction u n'est pas définie en 0.

A fortiori, pour $\alpha<1$, on ne peut pas conclure.

3. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x, $u_n'(x)=ina_n e^{inx}$.

Par hypothèse, la famille $\left(n^4a_n^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire que la famille $\left(n^2(ina_n)^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Le résultat de la question 1 appliqué à $\sum ina_n e^{inx}$ montre que les séries $\sum u_n'$ et $\sum u_{-n}'$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions permet de conclure que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=i\sum_{n\in\mathbb{Z}}na_n e^{inx}$.

3. Théorème de Chudnovsky

Énoncé

Soit I un segment contenu dans $]0,1[$.

1. Soit φ l'application $x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier la convergence sur I de la suite de fonctions (φ_n) (où $\varphi_n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$).
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ convergeant uniformément vers f sur I.

Solution

1. Une étude rapide de la fonction φ montre que $\varphi(]0,1[) = \left]0,\frac{1}{2}\right]$, que φ est croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et que, pour tout $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $\varphi(x) \geqslant x$. Enfin les points fixes de φ sont 0 et $\frac{1}{2}$.
   Soit $x \in [0,1]$.
   Ce qui précède montre que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ prend, pour $n \geqslant 1$, ses valeurs dans $]0,\frac{1}{2}]$ et est croissante. Elle converge donc.
   Sa limite ne peut être 0 puisqu'elle croît ; c'est donc $\frac{1}{2}$.
   Ceci montre la convergence simple sur $]0,1[$ de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{2}$.

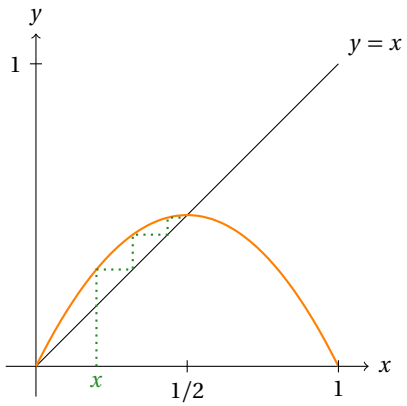


FIGURE 1 – Graphe de φ

   Montrons que la convergence est uniforme sur I, où I est un segment contenu dans $]0,1[$.
   L'image $\varphi(I)$ est un segment inclus dans $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.
   Soit a la borne inférieure de ce segment.
   Sachant que φ est croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a, pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_{n-1}(a) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2}$ puisque $\varphi(x) \in \left[a,\frac{1}{2}\right]$.
   La suite $(\varphi_n(a))$ convergeant vers $\frac{1}{2}$, cela montre que (φ_n) converge uniformément sur I vers $\frac{1}{2}$.

2. Notons $\mathscr{C}$ l'algèbre des fonctions continues sur I, munie de la norme de la convergence uniforme.
   Dans la suite on identifie tout polynôme formel de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction de $\mathscr{C}$ qui lui est canoniquement associée.
   Avec cette identification, la question posée consiste à trouver l'adhérence de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathscr{C}$.
   Comme φ_n est dans $\mathbb{Z}[X]$ pour tout n, la première question montre que la fonction constante $\frac{1}{2}$ est dans cette adhérence.
   Notons que cette adhérence est stable pour la somme et pour le produit.
   En effet, si (f_n) et (g_n) sont des suites de $\mathbb{Z}[X]$ qui convergent uniformément vers f et g sur I, alors (f_n+g_n) converge uniformément vers $f+g$ car
   $$\|(f_n+g_n)-(f+g)\|_\infty \leqslant \|f_n-f\|_\infty + \|g_n-g\|_\infty.$$
   De même en écrivant
   $$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n-g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n-f\|_\infty,$$
   on voit que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg car la suite $\|f_n\|_\infty$ est bornée (puisqu'elle converge vers $\|f\|_\infty$).
   Il en résulte que la fonction constante $\frac{1}{2^m}$ est dans $\overline{\mathbb{Z}[X]}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
   Comme on a aussi toutes les fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on a dans $\overline{\mathbb{Z}[X]}$ toutes les fonctions constantes $x \mapsto \frac{p}{2^m}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.
   Comme l'ensemble $D = \left\{\frac{p}{2^m}, (p,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$ des rationnels dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Z}[X]}$ contient finalement toutes les fonctions constantes.
   Il en résulte que $\mathbb{R}[X] \subset \overline{\mathbb{Z}[X]}$ et donc que $\overline{\mathbb{R}[X]} \subset \overline{\mathbb{Z}[X]}$. Or $\overline{\mathbb{R}[X]} = \mathscr{C}$ par le théorème de Weierstrass.
   On a donc démontré que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $\mathscr{C}$.