Programme de colle – MPI*

1. Suites et séries de fonctions numériques d'une variable réelle,

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation. La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A\subset\mathbb{R}$, aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ soit $$U_n(x)=\int_a^x u_n,\quad U(x)=\int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n\to\int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u'=v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u_n') sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions. Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

Semaine prochaine : Structures algébriques.

2. Questions de cours

(i) Démonstration de tout résultat du cours au choix du colleur hors démonstration hors-programme du théorème de la double limite.

(ii) **Fonction ζ de Riemann**

Définition, Classe $\mathscr{C}^\infty$, convexité, variations, limite en $+\infty$, équivalent et limite en 1, tracé, absence de convergence uniforme au voisinage de 1.

(iii) **Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.** (révisions)

(iv) **Théorème de Weierstrass** par les polynômes de Bernstein.

(v)
- Utilisation du théorème de Weierstrass pour montrer que l'orthogonal du sous-espace des fonctions polynomiales est réduit à la fonction nulle dans l'espace des fonctions continues sur un segment muni de son produit scalaire canonique.
- Une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale. Contre-exemple à l'extension du théorème de Weierstrass à un tel intervalle.

(vi) **Exercice classique** : On définit, sur $\mathbb{R}[X]$,

$$N(P)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^1 P(t)t^n\,\mathrm{d}t\right| \qquad \|P\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|P(t)| \qquad \|P\|_1=\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?
3. Les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont elles équivalentes ?

Les exercices de la **banque CCINP 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 46, 53** sont à savoir faire mais les étudiants ne seront pas interrogés dessus.