

DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 2**À LIRE ATTENTIVEMENT**

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- **Il est conseillé d'utiliser un brouillon**. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Vous avez le choix entre deux sujets. Il faut choisir rapidement et ne pas changer d'avis.

Sujet 1 : Centrale Maths 1 PC 2003

Sujet sans mauvaise surprise, long et technique. C'est rassurant.

Sujet 2 : ENS Maths D MP 2024

Sujet extrêmement long (prévu pour 6h, mais même en 6h, c'est trop long) formel et délicat.

Le sujet parle de série entière mais rien n'est à savoir dessus, il s'agit de manipulation de suites, présentées « à la manière des séries » (qu'on appelle plutôt séries formelles habituellement).

Il manque un théorème pour répondre à la question 44 (le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire que nous verrons dans le chapitre sur les équations différentielles), mais de là à ce que vous y arriviez...

Plan du problème

Dans les préliminaires, on établit quelques généralités utiles par la suite sur les applications intégrables. Elles sont illustrées par la partie **I** et utilisées pour établir les résultats de la partie **II**. Dans les parties **III** et **IV**, on étudie le comportement asymptotique de quelques suites et séries en utilisant les idées qui précèdent.

Rappels et notations

- Soient f et g deux fonctions de variable réelle et à valeurs réelles ne s'annulant pas au voisinage d'un élément $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, sauf éventuellement en ce point. f et g sont dites équivalentes en b si et seulement si leur quotient tend vers 1 en b . On notera alors $f \sim g$ en b . f est dite négligeable devant g en b si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 en b . On notera alors $f = o(g)$ en b .
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de termes non nuls à partir d'un certain rang. Les suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si et seulement si la suite (w_n) définie pour n assez grand par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1 ; on note alors $u_n \sim v_n$. La suite (u_n) est dite négligeable devant (v_n) si et seulement si (w_n) converge vers 0 ; on note alors $u_n = o(v_n)$.
- Pour une série $\sum u_n$ de nombres réels, on note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Si de plus $\sum u_n$ est convergente, on note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Préliminaires

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$, f et g deux applications continues par morceaux sur $[a; b[$ à valeurs strictement positives.

1) On suppose que g est intégrable sur $[a; b[$.

- a) Montrer qu'en b , la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right).$$

- b) Montrer qu'en b , la relation $f \sim g$ entraîne $\int_x^b f \sim \int_x^b g$
(on justifiera l'intégrabilité de f sur les intervalles $[x; b[$ considérés).

2) On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a; b[$.

- a) Montrer qu'en b , la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right).$$

Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut en général rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a; b[$.

- b) Montrer qu'en b , la relation $f \sim g$ entraîne $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Que dire de l'intégrabilité de f sur $[a; b[$?

Partie I.

I.A.

I.A.1) Déterminer un équivalent simple en 0^+ de

$$\int_x^1 \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin}(t)} dt.$$

I.A.2) En déduire un équivalent simple en 0^+ de $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin}(t)} dt$.

I.B.

I.B.1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$ on a :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}.$$

I.B.2) Plus généralement, si n est un entier naturel, établir le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

I.C. Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$

Partie II.

Soient a un nombre réel et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

II.A. Montrer à l'aide des préliminaires que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α quand x tend vers $+\infty$ (on pourra distinguer le cas $\alpha = 0$.)

II.B. On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

II.B.1) Montrer que f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

II.B.2) Montrer qu'en $+\infty$ on a $\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha+1}$ (on pourra considérer $\frac{xf(x)}{\alpha+1}$ et utiliser les préliminaires.)

II.C. On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

II.C.1) Étudier l'intégrabilité de f sur $[a; +\infty[$.

II.C.2) Montrer qu'en $+\infty$ on a

$$\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.3) Donner un exemple d'application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ à valeurs strictement positives telles qu'en $+\infty$ le quotient $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tende vers une limite $\alpha > -1$, mais telle que l'on n'ait

$$\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.D.

II.D.1) Étudier l'intégrabilité sur $[2; +\infty[$ des applications $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}$.

II.D.2) Étudier, à l'aide des questions précédentes, l'intégrabilité sur $[2; +\infty[$ des applications $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma(\ln(x))^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

II.E. Que conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a; +\infty[$ dans le cas $\alpha = -1$?

Partie III.

Dans cette partie, on considère une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs strictement positives.

On suppose qu'en $+\infty$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ tend vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère la série de terme général $f(n)$. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses restes quand la série converge.

On associe à f deux applications u et v continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et définies par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in [n-1; n[, \quad u(x) = f(n) \text{ et } v(x) = \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

On pose enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = e^{-\alpha x} f(x)$.

III.A. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in [n-1; n]$, on ait :

$$|h(t) - h(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)h(n).$$

(on pourra considérer $\frac{h'}{h}$).

III.B. On suppose dans cette question que α n'est pas nul. Dédurre de **III.A** que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\int_{n-1}^n f(t) dt \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n).$$

III.C. On suppose encore dans cette question que α n'est pas nul.

III.C.1) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}^*$ les intégrales $\int_{k-1}^k v(t) dt$ et $\int_{k-1}^k u(t) dt$ à l'aide de f .

À l'aide des préliminaires, établir les résultats suivants :

III.C.2) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ converge et on a, quand n tend vers $+\infty$,

$$R_n \sim \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

III.C.3) Si f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ diverge et on a, quand n tend vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_0^n f(t) dt.$$

III.D. On suppose à présent que $\alpha = 0$.

Montrer alors que la série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec $R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t) dt$ en cas de convergence et $S_n \sim \int_0^n f(t) dt$ en cas de divergence.

Partie IV.

IV.A. À l'aide de ce qui précède, déterminer un équivalent simple des sommes suivantes quand n tend vers $+\infty$:

IV.A.1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} ;$

IV.A.2) $\sum_{k=1}^n \ln k ;$

IV.A.3) $\sum_{k=1}^n 2^k \ln k .$

IV.B. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives équivalentes.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad S_n(b) = \sum_{k=0}^n b_k.$$

Dans le cas où ces séries convergent, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad R_n(b) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

IV.B.1) Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a $R_n(a) \sim R_n(b)$.

IV.B.2) Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a $S_n(a) \sim S_n(b)$.

IV.C. Dédurre de ce qui précède les résultats suivants lorsque n tend vers $+\infty$:

IV.C.1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$

IV.C.2) $n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, où γ et δ sont deux constantes qu'on ne demande pas d'explicitier.

IV.C.3) Que vaut δ ?

• • • F I N • • •

ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2024

JEUDI 18 AVRIL 2024

08h00 - 14h00

FILIERE MP - Epreuve n° 7

MATHEMATIQUES D (U)

Durée : 6 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

Le sujet comprend 10 pages, numérotées de 1 à 10.

Début de l'épreuve

Tout au long de ce sujet, la notation $A \stackrel{\text{déf}}{=} B$ indique que le symbole A est défini comme étant égal à B . Rappelons que la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

converge, pour tout nombre réel $\alpha \in \mathbf{R}$, vers un nombre réel strictement positif que l'on note e^α et que l'on appelle l'*exponentielle* de α . L'application $\alpha \mapsto e^\alpha$ établit une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_{>0}$ qui satisfait à la relation : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

Le but de ce sujet est de donner une preuve¹ du résultat suivant, qui est un cas particulier du *théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass* :

Théorème 1. Soit $r \geq 2$ un entier. Si $a_1, \dots, a_r \in \mathbf{Q}$ sont des nombres rationnels distincts, alors les nombres réels $e^{a_1}, \dots, e^{a_r}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Chemin faisant, nous établirons quelques propriétés de nature arithmétique des séries entières à coefficients rationnels qui sont solutions d'une équation différentielle.

A. Quelques conséquences

1. Pour un nombre rationnel strictement positif $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, notons $\log(a)$ le seul nombre réel satisfaisant à $e^{\log a} = a$. Dédurre du théorème 1 que $\log(a)$ est irrationnel pour tout nombre rationnel strictement positif $a \neq 1$.
2. Soit $a \in \mathbf{Q}^\times$ un nombre rationnel non nul. Dédurre du théorème 1 que, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbf{Q}[x]$, on a $P(e^a) \neq 0$.

On dit que le nombre e^a est *transcendant*.

¹suivant l'article « An Alternative Proof of the Lindemann–Weierstrass Theorem » de F. Beukers, J. P. Bézivin et P. Robba (*Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 193–197).

B. Séries entières et fractions rationnelles

Une *série entière à coefficients rationnels* est une suite $(c_n)_{n \geq 0}$ de nombres rationnels. On munit l'ensemble des telles suites des opérations d'addition et de multiplication

$$(c_n)_{n \geq 0} + (d_n)_{n \geq 0} = (c_n + d_n)_{n \geq 0},$$

$$(c_n)_{n \geq 0} \cdot (d_n)_{n \geq 0} = \left(\sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right)_{n \geq 0}.$$

L'élément neutre pour l'addition est la suite $(0)_{n \geq 0}$ et l'élément neutre pour la multiplication est la suite $(1, 0, 0, \dots)$. En pratique, plutôt que comme une suite on pensera à une série entière à coefficients rationnels $(c_n)_{n \geq 0}$ comme une expression de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

On voit x comme une variable “formelle”, c'est-à-dire que l'on ne se soucie pas des propriétés de convergence (si l'on remplace x par un nombre réel α , la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ peut être convergente ou divergente). Avec cette notation, les opérations d'addition et multiplication de deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ deviennent

$$(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n,$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right) x^n.$$

On écrit simplement 0 et 1 pour les éléments neutres pour l'addition et la multiplication. La *dérivée* d'une série entière f comme ci-dessus est la série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n.$$

L'opération de dériver une série entière est linéaire et satisfait à la règle de Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

On note $\mathbf{Q}[[x]]$ l'ensemble des séries entières à coefficients rationnels. On peut voir les polynômes à coefficients rationnels comme le sous-ensemble $\mathbf{Q}[x] \subset \mathbf{Q}[[x]]$ formé des séries entières telles qu'il existe un entier $d \geq 0$ satisfaisant à $c_n = 0$ pour tout $n > d$.

3. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$ une série entière dont les coefficients c_n sont des nombres entiers. Montrer que s'il existe un nombre réel $\alpha \geq 1$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ converge, alors f est un polynôme.

4. Soit $Q \in \mathbf{Q}[x]$ un polynôme à coefficients rationnels dont 0 n'est pas racine. Montrer qu'il existe une unique série entière $f \in \mathbf{Q}[[x]]$ satisfaisant à $Q \cdot f = 1$.

Montrer que si Q est à coefficients entiers et que son terme constant c_0 vaut 1 ou -1 , alors cette unique série entière f est à coefficients entiers.

Rappelons que $\mathbf{C}(x)$ désigne l'ensemble des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbf{C}[x]$ et Q non nul. On considérera le sous-ensemble $\mathbf{Q}(x) \subset \mathbf{C}(x)$ formé des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbf{Q}[x]$, que l'on appellera *fractions rationnelles à coefficients rationnels*. Pour un nombre complexe α et un polynôme non nul $R \in \mathbf{Q}[x]$, posons

$$\text{ord}_\alpha(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } R, \\ \text{multiplicité de } \alpha & \text{si } \alpha \text{ est racine de } R. \end{cases}$$

Soit P/Q une fraction rationnelle non nulle. On dit que $\alpha \in \mathbf{C}$ est un *pôle* de P/Q si l'inégalité $\text{ord}_\alpha(Q) > \text{ord}_\alpha(P)$ est satisfaite. L'entier $\text{ord}_\alpha(Q) - \text{ord}_\alpha(P)$ s'appelle alors l'*ordre du pôle*. La fraction rationnelle nulle n'a pas de pôle.

5. Montrer que si 0 n'est pas un pôle de $P/Q \in \mathbf{Q}(x)$, alors il existe une unique série entière à coefficients rationnels $g \in \mathbf{Q}[[x]]$ telle que $P = Q \cdot g$.

Montrer que l'application $P/Q \mapsto g$ est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbf{Q}(x)$ et dans $\mathbf{Q}[[x]]$, et qu'elle envoie la dérivée $(P/Q)' = (P'Q - PQ')/Q^2$ sur la série entière dérivée g' .

On dit que g est le *développement en série entière* (parfois abrégé *développement en série* ou encore *développement*) de la fraction rationnelle P/Q et on écrit $g = P/Q$.

6. Soit $Q \in \mathbf{Q}[x]$ un polynôme à coefficients rationnels de terme constant égal à 1. Montrer qu'il existe un entier $b \geq 1$ tel que $Q(bx)$ soit à coefficients entiers.

On dit qu'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$ est *globalement bornée* s'il existe des entiers $A, B \geq 1$ tels que

$$Af(Bx) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (B^n A c_n) x^n$$

soit une série entière à coefficients entiers.

7. Montrer que si $f \in \mathbf{Q}[[x]]$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels, alors f est globalement bornée.
8. Montrer que la série entière

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où $c_n = 1$ si n est le carré d'un entier $m \geq 0$ et $c_n = 0$ autrement, n'est *pas* le développement en série entière d'une fraction rationnelle.

On définit la *primitive* d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ comme la série entière

$$\int_0^x f(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

9. Donner un exemple d'un développement en série entière d'une fraction rationnelle dont la primitive n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.
10. (*Question plus difficile*) Soit f le développement en série entière d'une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbf{Q}(x)$ dont tous les pôles sont des nombres rationnels. Supposons que la primitive $\int_0^x f(t) dt$ soit globalement bornée. Montrer que $\int_0^x f(t) dt$ est alors le développement en série entière d'une fraction rationnelle dans $\mathbf{Q}(x)$.

C. Séries entières et opérateurs différentiels

Dans ce qui suit, on appellera *opérateur différentiel* (sous-entendu : à coefficients polynomiaux à coefficients rationnels) toute expression de la forme

$$L = R_\mu(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^\mu + \cdots + R_1(x) \left(\frac{d}{dx} \right) + R_0(x),$$

où $\mu \geq 0$ est un entier et $R_0, \dots, R_\mu \in \mathbf{Q}[x]$ sont des polynômes à coefficients rationnels. Si R_μ n'est pas nul, on dit que L est d'*ordre* μ . Un tel opérateur différentiel agit sur une série entière $f \in \mathbf{Q}[[x]]$ par la formule

$$(L \cdot f)(x) = R_\mu(x) f^{(\mu)}(x) + \cdots + R_1(x) f'(x) + R_0(x) f(x),$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k ème d'une série entière.

11. Montrer l'égalité : pour tous $m \geq 0$ et $\mu \geq 0$,

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^\mu \cdot (x^m f) = \left(x^m \left(\frac{d}{dx} \right)^\mu + \sum_{i=1}^{\min(\mu, m)} \frac{m(m-1) \cdots (m-i+1) \mu(\mu-1) \cdots (\mu-i+1)}{i!} x^{m-i} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\mu-i} \right) \cdot f.$$

On dit qu'une série entière $f \in \mathbf{Q}[[x]]$ est *solution d'une équation différentielle* (d'ordre μ) s'il existe un opérateur différentiel non nul L (d'ordre μ) comme ci-dessus tel que $L \cdot f = 0$.

12. Montrer que le développement en série entière de toute fraction rationnelle à coefficients rationnels est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

13. Montrer qu'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$ est solution d'une équation différentielle si et seulement s'il existe un entier $d \geq 0$ et des polynômes non tous nuls $S_0, \dots, S_d \in \mathbf{Z}[x]$ tels que : pour tout $n \geq 0$,

$$S_0(n)c_n + \dots + S_d(n)c_{n+d} = 0.$$

14. Donner une nouvelle preuve, basée sur les questions 12 et 13 ci-dessus, du fait que la série entière $\sum_{m=0}^{\infty} x^{m^2}$ n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.
15. Montrer que la série entière

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{(n!)^5} x^n$$

est solution d'une équation différentielle, puis en expliciter une.

16. Montrer que $h(x)$ ci-dessus est à coefficients entiers.
17. Montrer qu'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$ est solution d'une équation différentielle si et seulement si sa *transformée de Laplace*

$$\widehat{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

est solution d'une équation différentielle.

D. Stratégie de la démonstration du théorème 1

Soient $r \geq 2$ un entier et $a_1, \dots, a_r \in \mathbf{Q}$ des rationnels distincts. Soient $b_1, \dots, b_r \in \mathbf{Q}^\times$ des rationnels non nuls. Posons $e^{a_i x} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i^n}{n!} x^n$ et considérons la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \stackrel{\text{déf}}{=} b_1 e^{a_1 x} + \dots + b_r e^{a_r x}.$$

18. Montrer que la transformée de Laplace $\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est le développement en série entière de la fraction rationnelle

$$\sum_{i=1}^r \frac{b_i}{1 - a_i x}.$$

En déduire que f n'est pas la série entière nulle.

Considérons la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie en termes des coefficients u_n par la formule

$$v_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{u_i}{i!}$$

et la série entière

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]].$$

19. Montrer l'égalité des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - n v_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

20. Montrer que l'opérateur différentiel $L = -x^2 \left(\frac{d}{dx}\right) + (1-x)$ agit sur $v(x)$ par

$$(L \cdot v)(x) = \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{1 - a_i x}.$$

21. En déduire que si $v(x)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle P/Q , alors tout élément de l'ensemble non vide $\{1/a_i \mid a_i \neq 0\}$ est un pôle de P/Q .

22. Montrer que $v(x)$ n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.

Nous avons ainsi réduit la démonstration du théorème 1 à celle de la proposition suivante, qui fera l'objet des parties E et F du sujet.

Proposition 1. Si $b_1 e^{a_1} + \dots + b_r e^{a_r} = 0$, alors la série entière $v(x)$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels.

On appelle *polynôme exponentiel* toute série entière à coefficients rationnels de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^s P_i(x) e^{c_i x},$$

où $c_1, \dots, c_s \in \mathbf{Q}$ sont des rationnels et $P_1, \dots, P_s \in \mathbf{Q}[x]$ sont des polynômes.

23. Montrer que le théorème 1 est équivalent à l'énoncé suivant :

Soit $f(x) \in \mathbf{Q}[[x]]$ un polynôme exponentiel tel que $f(1) = \sum_{i=1}^s P_i(1) e^{c_i}$ s'annule. Alors $f(x)/(x-1)$ est encore un polynôme exponentiel.

E. L'arithmétique des coefficients v_n

Rappelons l'hypothèse $b_1 e^{a_1} + \dots + b_r e^{a_r} = 0$ de la proposition 1. Quitte à remplacer le polynôme exponentiel $f(x) = b_1 e^{a_1 x} + \dots + b_r e^{a_r x}$ par un multiple entier, on peut supposer sans perte de généralité que les coefficients $u_0, \dots, u_{r-1}$ sont des entiers.

On fait cette hypothèse dorénavant.

Définissons des nombres rationnels $s_1, \dots, s_r$ par la formule

$$(T - a_1) \cdots (T - a_r) = T^r - s_1 T^{r-1} - \dots - s_{r-1} T - s_r.$$

24. Montrer l'égalité : pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+r} = s_1 u_{n+r-1} + \dots + s_r u_n.$$

Soit D un dénominateur commun des nombres rationnels $a_1, \dots, a_r$ et soit

$$A = \max(1, |a_1|, \dots, |a_r|).$$

25. Montrer que $D^n u_n \in \mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 0$.

26. Montrer qu'il existe un nombre réel $c_1 > 0$ tel que : pour tout $n \geq 0$,

$$|v_n| \leq c_1 \frac{A^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tous entiers $n, k \geq 0$, définissons le nombre rationnel $v_n(k)$ comme le coefficient en degré n de la série entière

$$(1 - s_1 x - \dots - s_r x^r)^k v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) x^n.$$

27. Montrer que $v(x)$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle si et seulement s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) x^n$ soit un polynôme.

28. Observer l'égalité : pour tous $n \geq r$ et $k \geq 0$,

$$v_n(k+1) = v_n(k) - s_1 v_{n-1}(k) - \dots - s_r v_{n-r}(k).$$

Posons $C = 1 + |s_1| + \dots + |s_r|$.

29. Montrer que $D^n v_n(k) \in \mathbf{Z}$ et qu'il existe un nombre réel $c_2 > 0$ tel que

$$|v_n(k)| \leq c_2 A^n C^k \text{ pour tous } n \geq kr.$$

30. Soit $\ell \geq 0$ un entier. Montrer qu'il existe un polynôme $P_\ell \in \mathbf{Q}[x]$ de degré $< r(\ell + 1)$ satisfaisant à

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-\ell+1) u_{n-\ell} x^n = \frac{P_\ell(x)}{(1 - s_1 x - \cdots - s_r x^r)^{\ell+1}}.$$

31. Définissons deux suites $(w_{n,k})_{n,k \geq 0}$ et $(w_n(k))_{n,k \geq 0}$ par les formules

$$w_{n,k} = n! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{u_i}{i!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n(k) x^n = (1 - s_1 x - \cdots - s_r x^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,k} x^n.$$

Montrer l'égalité $w_n(k) = v_n(k)$ pour tous n et k tels que $n \geq kr$.

32. En déduire que $k!$ divise $D^n v_n(k)$ pour tous n et k tels que $n \geq kr$.

33. Montrer l'égalité

$$v_n(k) = \sum_{i=1}^r b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr} (t - a_1)^k \cdots (t - a_r)^k dt.$$

F. Démonstration de la proposition 1

Dans cette partie, nous démontrons la proposition 1, concluant ainsi la démonstration du théorème 1. Il nous suffira de prouver qu'il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k_0) x^n$$

soit un polynôme (d'après la question 27).

34. Montrer que si $v_n(k)$ n'est pas nul et $n \geq kr$, alors

$$k! \leq |D^n v_n(k)| \leq c_2 (AD)^n C^k.$$

35. En déduire qu'il existe un entier k_0 tel que

$$v_n(k) = 0 \text{ pour tous } k \geq k_0 \text{ et } kr \leq n \leq 10kr.$$

36. Conclure que $v_n(k_0) = 0$ pour tout $n \geq k_0 r$.

Le théorème est démontré!

G. Fonctions E

Dans cette dernière partie, on présente une généralisation à une classe plus large de séries entières à coefficients rationnels de l'énoncé de la question 23, à savoir le fait que le quotient par $x - 1$ d'un polynôme exponentiel s'annulant en 1 est encore un polynôme exponentiel. Une *fonction E* (sous-entendu : à coefficients rationnels) est une série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- (a) f est solution d'une équation différentielle ;
- (b) il existe un nombre réel $C > 0$ tel que

$$|b_n| \leq C^n \quad \text{et} \quad \text{dén}(b_0, \dots, b_n) \leq C^n \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

où $\text{dén}(b_0, \dots, b_n)$ désigne le plus petit entier $d \geq 1$ tel que $db_0, \dots, db_n$ soient des entiers ($\ll$ le dénominateur commun de $b_0, \dots, b_n \gg$).

Les polynômes à coefficients rationnels sont des exemples "triviaux" de fonctions E .

Rappelons que $\hat{f}(x)$ désigne la transformée de Laplace introduite dans la question 17.

- 37. Montrer que si f est une fonction E , alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \alpha^n$ converge pour tout nombre réel α . On note $f(\alpha)$ sa valeur.
- 38. Soit f une fonction E qui n'est pas un polynôme. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha^n$ diverge pour tout nombre réel α avec $|\alpha| > R$.
- 39. Quelles sont les fonctions E telles que $\hat{f}$ est aussi une fonction E ?
- 40. Démontrer que les fonctions E sont stables par addition et multiplication.
- 41. Soit f un polynôme exponentiel. Montrer que f est une fonction E telle que $\hat{f}$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels.
- 42. Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ est une fonction E .
- 43. Montrer que la fonction de Bessel

$$J_0(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

est une fonction E telle que $\hat{J}_0(x)$ satisfait à l'équation $(1+x^2)\hat{J}_0(x)^2 = 1$. En déduire que $J_0(x)$ n'est pas un polynôme exponentiel.

44. Montrer que les zéros réels de la fonction de Bessel $J_0(x)$ sont simples, c'est-à-dire si $J_0(\alpha) = 0$, alors $J'_0(\alpha) \neq 0$.
45. Soit $f(x)$ une fonction E telle que $f(1) = 0$. Montrer que la série entière $f(x)/(x-1)$ est encore une fonction E .

Ce dernier résultat est l'un des ingrédients sur lesquels repose la méthode mise en place par Y. André à la fin des années 90 pour démontrer le *théorème de Siegel-Shidlovskii*. Il s'agit d'un énoncé de transcendance pour les valeurs des fonctions E en des nombres rationnels, qui généralise le théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass et implique, par exemple, que le nombre $J_0(\alpha)$ est transcendant pour tout rationnel non nul α .

Fin du sujet