

DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 2

À LIRE ATTENTIVEMENT

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard »).
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon.** Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Problème 1 : CCINP Maths 1 MP - MPI 2025 — Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

Partie I – Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t)dt$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \int_{k-1}^k f(t)dt$.

1. Préciser la monotonie des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis démontrer que pour tout entier k non nul, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1)$.

2. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

3. Démontrer enfin les deux résultats :

(1) f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

(2) La série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) \right)$ converge.

4. Un exemple

On pose pour tout $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

(a) Étudier la monotonie de la fonction f , calculer $\int_2^x f(t)dt$ et en déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}.$$

(b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln(2)$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

5. Une application

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) En utilisant le résultat (2) de la question 3, établir que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

(b) Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

6. Une application sur une série de fonctions

On considère pour tout $x \in]0, +\infty[$ la suite définie pour $n \geq 1$ par $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

(a) Soit x un réel strictement positif fixé. Étudier la convergence de la série numérique $\sum g_n(x)$.

(b) On pose pour x fixé non nul $f(t) = \frac{x}{t^2 + x^2}$. Établir que pour n entier non nul on a l'encadrement

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$$

(c) En déduire que pour tout x non nul

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

(d) Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

Partie II – Contre-exemples

7. On pose pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

(a) Calculer, pour n entier naturel non nul, $\int_n^{n+1} f(t)dt$.

On pourra remarquer que $\int_n^{n+1} f(t)dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t)dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t)dt$.

On note $[x]$ la partie entière du réel x .

(b) Établir que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x |\sin(2\pi t)|dt \geq \frac{2}{\pi}([x] - 1)$.

La fonction f est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$? Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$?

8. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ telle que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ diverge.

Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1, +\infty[$ de la manière suivante : chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n - a_n, n + a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1. Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n - a_n, n + a_n]$.

Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

Problème 2 : CCINP Maths PC 2022 — La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

1. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans 3, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}.$$

II.1 - Étude d'une famille de fonctions

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

4. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

5. Déduire de la question précédente que pour tout $t \in]0, +\infty[$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{-t} \ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$.
7. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

9. On admet le théorème suivant.

Théorème de convergence dominée

Si une suite de fonctions (g_n) continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ vérifie

H1 $\forall t \in]0, +\infty[, \quad g_n(t) \rightarrow g(t)$

H2 g est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

H3 Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |g_n(t)| \leq \varphi(t).$$

$$\text{alors} \quad \int_0^{+\infty} g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

Déduire des résultats de la sous-partie II.1 la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

10. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

11. Montrer que l'on a la relation

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + n J_n.$$

12. Déduire des questions précédentes que

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$