

CCINP Maths 1 MP 2002

Si n_0 est un entier naturel et si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ par $P_n = \prod_{p=n_0}^n u_p = u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_n$.

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$, de terme général u_n , converge si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ n'admet pas de limite finie ou si elle converge vers 0, on dit que le produit $\prod_{n \geq n_0} u_n$ diverge.

A. Généralités et exemples

- En considérant le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer que pour que le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1.
 - Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 0$.
 - Montrer que les produits infinis $\prod_{n \geq 0} u_n$ et $\prod_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.
- On suppose dans cette question que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs.
 - Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \ln u_n$ converge.
 - Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
 - Si, de plus, pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n < 1$, montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 - u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- On pose, dans cette question, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 2$.
 - Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.
 - Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} (1 + u_n)$ diverge. Qu'en conclut-on ?
- Déterminer la nature des produits infinis suivants :

$$(a) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \quad (b) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \quad \text{pour } x \in]-\pi, \pi[\quad (c) \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \quad \text{pour } x \in]0, +\infty[$$

6. Application : Un peu d'histoire...

- Retrouver, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si p est un entier naturel tel que $p \geq 2$, que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$?
- On note $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots$
Voici un extrait d'un texte écrit par Leonhard Euler (mathématicien suisse) en 1737 (« Introduction à l'analyse infinitésimale ») :

« ...Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quel que soit le nombre de facteurs infinis ou finis.

Par exemple, on aura $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ série où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux ; c'est-à-dire toutes les puissances de deux.

On aura ensuite $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \dots$

On ne retrouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 et 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 et 3. Donc, si au lieu de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, et qu'on suppose $P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11}) \dots}$, on aura

$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$, série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or, comme tous les nombres sont ou des nombres premiers ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs... »

Utiliser librement ce texte pour montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

B. Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

Pour tout t réel tel que $\sin t \neq 0$, on pose $\cotan t = \frac{\cos t}{\sin t}$. On admet la formule suivante (que l'on peut par exemple obtenir à l'aide d'un développement en série de Fourier)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

- Soit $x \in]0, \pi[$. On définit la fonction g sur $[0, x]$ par $g(t) = \cotan t - \frac{1}{t}$ si $t \in]0, x]$ et $g(0) = 0$.

- Montrer que la fonction g est continue sur $[0, x]$ et calculer $\int_0^x g(t) dt$.

(b) Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, $g(t) = 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2 \pi^2}$.

(c) On définit pour tout $N \geq 1$ et $t \in [0, x]$, $g_N(t) = 2t \sum_{n=1}^N \frac{1}{t^2 - n^2 \pi^2}$ et $R_N(t) = g(t) - g_N(t)$.

Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, $|R_N(t)| \leq |R_N(x)|$.

(d) En déduire que $\int_0^x g_N(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt$.

8. Montrer à l'aide de la question précédente que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \in]0, \pi[$ et en déduire le développement eulérien de $\sin x$

$$\text{Pour tout } x \in]-\pi, \pi[, \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

9. Application : Déterminer une expression simple de $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$, appelée **Formule de Wallis**.

C. Formule de Weierstrass et constante d'Euler

10. Soit $x \in]0, +\infty[$.

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$. Γ est appelée **fonction Gamma d'Euler**.

(b) Calculer $\Gamma(1)$.

(c) On admet que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\Gamma'(x)$ s'obtient en dérivant directement par rapport à x sous le signe intégrale. Donner l'expression de $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

11. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $]0, +\infty[$ par l'expression suivante.

$$\forall t \in]0, n], f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \forall t \in]n, +\infty[, f_n(t) = 0.$$

(a) Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$.

(b) On admet le théorème suivant.

Théorème de convergence dominée

Si une suite de fonctions (f_n) continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ vérifie

H1 $\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) \rightarrow f(t)$

H2 f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

H3 Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ telle que $\forall t \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

alors

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x).$$

12. On pose pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

(a) Déterminer, pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

(b) En déduire pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, la valeur de $I_n(x)$.

(c) Démontrer la **formule de Gauss**.

$$\text{Pour tout } x \in]0, +\infty[, \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x).$$

13. Application.

(a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'égalité suivante est vérifiée.

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

(b) Déterminer alors, pour tout $x \in]0, 1[$, une expression simple de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$, appelée **formule des compléments**.

(c) En déduire la valeur de l'**intégrale de Gauss** $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

14. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

(a) Expliquer simplement pourquoi la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite (v_n) converge. Sa limite, notée γ , est la **constante d'Euler**.

15. Démontrer la **formule de Weierstrass**.

$$\text{Pour tout } x \in]0, +\infty[, \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

Cette formule permet, par un produit infini complexe, de définir la fonction Γ pour

$$\text{tout } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^- \text{ par } \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

16. Application.

(a) En admettant que l'on peut dériver sous le signe $\sum$, obtenir l'expression suivante de la **fonction digamma** $\psi = \Gamma'/\Gamma$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

(b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.

FIN DE L'ÉNONCÉ